نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة : الخامسة عشر

عنوان المحاضرة: المدخل الى نظرية القياس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. مقدمة في نظرية المجموعات
2. مقدمة في الطوبولوجيا
3. مقدمة في اساسية في القياس

مقدمة في نظرية المجموعات:

1- المجموعة و أمثلة عنها : المجموعة كالوعاء الذي بداخله اشياء

2- تمثيل المجموعات:

1. طريقة القائمة : يتم عرض عناصر المجموعة بشكل كامل
2. طريقة القاعدة : يتم ذكر الصفة المميزة
3. طريقة المخططات : يتم رسم العناصر داخل شكل ما بيضوي أو مستطيل أو اية شكل

مثال:

ما هي قواسم العدد 10 مثلهم بالطرق الثلاثة:

1. $\{1,2,5,10\}$
2. $\{x: 10 \ mod \ x = 0 \ ; x \in \mathbb{N}\}$
3.

10	5	2	1

3- رمز المجموعة بأحرف الكبيرة .... $A , B, C,$

4- العناصر التي تكون داخل المجموعة رموزها بأحرف الصغيرة ... $a, b, c,$

5- العلاقات الرئيسية بين المجموعات و العناصر

$$\in, \notin, \subset, \subseteq, \not\subseteq \not\subset, =$$

أمثلة:

$$a \in A \,, a \notin A \;\; , A \not\subset B, \dots \dots$$

مثال: ليكن لدينا $X = \{1,2,5,10\}$ فإن:

$$1 \in X, \{1,2\} \subset X, \{1,3\} \not\subset X$$

6- المجموعة الخالية: رمزها $\{\,\}, \emptyset$

1) محتواه في أي مجموعة
2) إن المجموعة الخالية وحيدة

7- قدرة مجموعة هي عدد عناصر المجموعة $|X| = 4$ من المثال السابق

8- مجموعة القوة لمجموعة: هي مجموعة جميع الأجزاء للمجموعة

مثال:

ما هي مجموعة القوى للمجموعة A حيث $A = \{1,2\}$

$|p(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$ حيث $p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

9- صف (اسرة , جماعة) من أجزاء المجموعة.

من المثال السابق $A = \{1,2\}$ و $p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ صف من A

$\tau = \{\{1\}, \{1,2\}\}$ ايضا صف من A و يكون $p(A)$ أكبر صف من أجزاء A

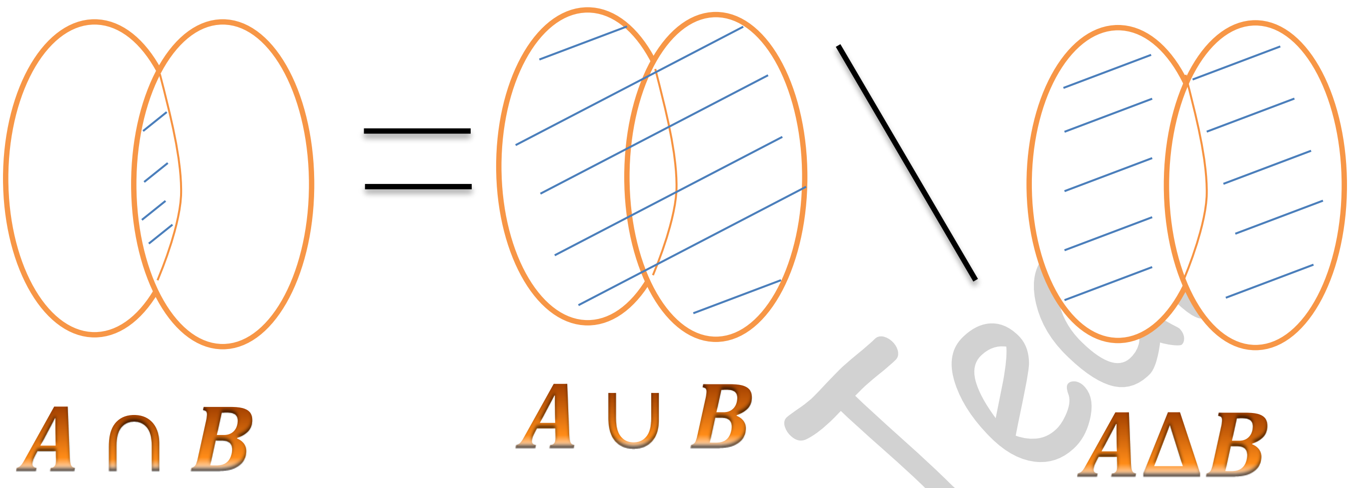
10- العمليات على المجموعات:

$\cup$ اجتماع, $\cap$ تقاطع, $\setminus$ فرق, Δ فرق تناظري, c المتمم

1) $\emptyset^c = X, X^c = \emptyset$
2) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \;\; , \;\; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
4) $A \setminus B = A \cap B' \;\; : B' = X \setminus B \;\; , \;\; A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

$A \setminus B = (A \cup B)\Delta B$

$5)\ A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B)$



$6) A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B) = A\Delta(B \setminus A)$

$7) A \cup A^c = X\ , A \cap A^c = \emptyset$

و هي بعض العمليات

مجموعة القوى لمجموعة: (مجموعة أجزاء مجموعة)

إن مجموعة القوى لمجموعة مغلقة لجميع العمليات $[\cup, \cap, \setminus, c, \Delta]$ على A

مثال:

$A = \{1,2\}$ أولا الإجتماع: $\qquad p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

التقاطع

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$

الفرق التناظري:

Δ	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

المتمم:

c	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
متممتها	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

نلاحظ أن جميع النتائج في كل جدول تنتمي ل $p(A)$ أي أن $p(A)$ مغلقة بالنسبة لجميع العمليات

مثال:

أذكر بعض صفوف المجموعة B حيث $B = \{1,2,3\}$

الصف الأول يمكن ان نكتب مجموعة القوى لمجموعة كصف ل B

$$p(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$$

مقدمة في الطوبولوجيا:

تعريف: اذا كانت لدينا مجموعة X لا تساوي الخالية و كان τ صفا (غير خالي) من أجزاء X

نقول عن τ إنه يمثل طوبولوجيا على X اذا تحققت الشروط التالية:

$\emptyset, X \in \tau$ (1
$\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau$ (2
$\forall A_{i \in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ (3

مثال: اذا كان $X = \{1,2\}$ و كانت الصفوف

1) $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ تمثل طوبولوجيا على X كونها تحقق جميع الشروط
2) $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ لا تمثل طوبولوجيا على X كونها غير مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع
3) $\tau_3 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}$ تمثل طوبولوجيا
4) $\tau_4 = \{\emptyset, X\}$ تمثل طوبولوجيا على X و تدعى الطوبولوجيا التافهة
5) $\tau_5 = p(X)$ تمثل طوبولوجيا على X ((أوسع طوبولوجيا على X))

ملاحظات:

1- كل عنصر من عناصر τ يسمى مجموعة مفتوحة

2- كل عنصر متمم لعنصر من عناصر τ يسمى مجموعة مغلقة

نتيجة: اذا كانت A مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مغلقة

3- $\emptyset, X$ مجموعتان مفتوحتان و مغلقتان في آن واحد في الطوبولوجيا

الجبر:

تعريف الجبر: اذا كانت $X \neq \emptyset$ و كان $\mathcal{A}$ صفا غير خال من أجزاء X

نقول على $\mathcal{A}$ انه يمثل جبرا على X اذا تحققت الشروط:

$\emptyset, X \in \mathcal{A}$ (1
$\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A} \ , \ A \cup B \in \mathcal{A}$ (2
$\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة لعمليتي الفرق و الإجتماع

تنويه: نلاحظ أن الجبر مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات و الدليل:

و الأن نريد إثبات أن الجبر مغلق بالنسبة ل $\Delta, c, \cap$

$$A, B \in \mathcal{A} : A\Delta B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق لعملية الفرق التناظري

$$: A \cap B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{(A\Delta B)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق بالنسبة لعملية التقاطع

$$A \in \mathcal{A}, \underbrace{X \in \mathcal{A}}_{\text{من تعريف}} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق بالنسبية لعملية المتمم

تعريف أخر للجبر اعتمادا على ما سبق: اذا كانت $X \neq \emptyset$ و كان $\mathcal{A}$ صفا (غير خال) من أجزاء X نقول عن $\mathcal{A}$ إنه يمثل جبر على X اذا تحققت الشروط:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

تعريف الجبر التام: هو جبر مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع العدود أي :

$$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

إن $\bigcup_{i \in I} A_i$ غير عدودة أم عند كتابة $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ فإننا نقصد بذلك أن I مجموعة عدودة

نتيجة: الجبر التام مغلق بالنسبة للتقاطع العدود

ملاحظة: الجبر(الجبر التام) المولد بالصف τ من أجزاء X هو أصغر جبر يحوي τ

مثال:

ما هو أصغر جبر يحوي τ اذا علمت أن $X = \{1,2,3,4\}$ و $\tau = \{\{1,2\}, \{3\}\}$

طريقة الحل: لإيجاد أصغر جبر يحوي τ نتبع الخطوات

1- يجب أن يحوي على $\emptyset, X$

2- مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع

3- مغلق بالنسبة لعملية المتمم

لنبدأ الحل سنورد الحل بنفس خطوات طريقة الحل ☺

الحل:

يجب أن يحتوي الجبر على $\emptyset$ و X ثم نطبق ∪ و المتمم

1- $\{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}\}$

2- $\{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

3- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$

و 3 هو الجبر المطلوب.

يترك للقارئ تفصيل الحل كونها تدريب على استخدام العمليات و لسهولتها

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي