نظري

◀ دكتور المادة: خليل يحيى

◀ المحاضرة التاسعة

◀ عنوان المحاضرة: قانون التجاذب

بسم الله وبالله المستعان . . لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول قانون التجاذب وبعض أمثلة عن القوة المركزية

## مثال (1)

أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

## الحل

لإيجاد القوة المؤثرة نستخدم دستور بينيه الثاني : $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

حيث : $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta)}{P}$

$$u' = -\frac{e\sin(\theta)}{P} \Rightarrow u'' = -\frac{e\cos(\theta)}{P}$$

نعوض كل من (( $u', u''$ )) في قانون التحريك الأساسي

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(-\frac{e\cos(\theta)}{P} + \frac{1+e\cos(\theta)}{P}\right)$$

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(\frac{1}{P}\right)$$

وبما أن $u = \frac{1+e.\cos(\theta)}{P} \Rightarrow u^2 = \frac{(1+e.\cos\theta)^2}{P^2}$

$$F = -m.c^2.u^2\left(\frac{1}{P}\right)$$

ونعلم أيضاً أنَ : $u = \frac{1}{r} \Rightarrow u^2 = \frac{1}{r^2}$

وبالتالي : $\boxed{F = -m.\frac{c^2}{\rho r^2}}$

وهي القوة المركزية التي تؤثر على النقطة المادية.

## مثال (2)

لتكن $M$ نقطة مادية كتلتها $m$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

**المطلوب :** أوجد قانون الحركة والمسار.

## الحل

هذه القوة مركزية جاذبة تتناسب طرداً مع بعد النقطة عن مركز الجذب .

حسب القانون الأساسي بالتحريك $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط نجد.... $m\dfrac{d2r}{dt^2} = -m\omega^2 r$

بالتقسيم على $m$ فنحصل على:

$$\frac{d2r}{dt^2} = -\omega^2 r \quad \Longrightarrow \quad r'' + \omega^2 r = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة دون طرف ثاني، حلها العام من الشّكل:

$$r = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

حيث: $\lambda_1, \lambda_2$ هما جذرا المعادلة و $c_1, c_2$ ثوابت التكامل

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $r = e^{\lambda t}$

$$r' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow r'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوِّض في (1) فنجد.... $\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$

نقسِّم على $e^{\lambda t}$ فنجد....

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 \Longrightarrow \lambda = \pm i\omega$$

نعو ض فنجد $r = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$

نعلم أن: $e^{-i\omega t} = cos(\omega t) - i\,sin(\omega t) \quad , \quad e^{i\omega t} = cos(\omega t) + i\,sin(\omega t)$

ومنه $r = c_1[cos(\omega t) + i\,sin(\omega t)] + c_2[cos(\omega t) - i\,sin(\omega t)]$

$$r = (c_1 + c_2)\,cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\,sin(\omega t)$$

نفرض أن: $B = i(c_1 - c_2)$ و $A = c_1 + c_2$

وبذلك: $r = A\,cos(\omega t) + B\,sin(\omega t) \ldots\ldots\ldots (2)$

لتعيين A, B من شروط البدء: $((r = r_0\ , r' = r'_0\ ,\ \ t = 0\ ))$

نشتق العلاقة (2) فنجد

$$r' = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

وبتعويض شروط البدء نجد ....

$$r'_0 = B\omega \ \Longrightarrow\ \boxed{B = \frac{r'_0}{\omega}}$$

لإيجاد A نعوِض شروط البدء في (2) فنجد .. $\boxed{A = r_0}$

نعوِض (A) و(B) في (2) وبذلك نحصل على:

$$r = r_0 \cos(\omega t) + \frac{r'_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

وهو الحل العام

حيث: $r_0$ هو نصف القطر الشّعاعي و $r'_0$ هي سرعته في تلك اللحظة.

لمعرفة المسار، نسقط على محورين $(x, y)$ موازيين للمحورين $(r_0, r'_0)$:

$$x = r_0 \cos(\omega t) \Longrightarrow \cos(\omega t) = \frac{x}{r_0} \dots\dots\dots (\$)$$

$$y = \frac{r'_0}{\omega} \sin(\omega t) \Longrightarrow \sin(\omega t) = \frac{y}{\frac{r'_0}{\omega}} \dots\dots\dots (\$\$)$$

نربع ($) و ($$) ونجمعهما :

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = \frac{x^2}{{r_0}^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{{r_0}^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2} = 1}$$

وهي معادلة قطع ناقص

## مثال (3)

لتكن $M$ نقطة مادية كتلتها $m$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}$

**المطلوب :** أوجد قانون الحركة والمسار.

## الحل

وهي قوة مركزية دافعة تتناسب طرداً نص القطر الشعاعي

$$m\frac{d2r}{dt^2} = m\omega^2 r \Longrightarrow \frac{d2r}{dt^2} = \omega^2 r$$

$$r'' = \omega^2 r \Longrightarrow r'' - \omega^2 r = 0 \ldots.(*)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة دون طرف ثاني حلها العام من الشكل:

$$r = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

حيث: $\lambda_1, \lambda_2$ هما جذرا المعادلة و $c_1, c_2$ ثوابت التكامل

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $r = e^{\lambda t}$

$$r' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow r'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوِّض بالعلاقة $(*)$فنجد...

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

نقسم على $e^{\lambda t}$ فنجد : $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\omega$

وبالتالي: $r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$

نعلم أن: $e^{\omega t} = ch(\omega t) + sh(\omega t) \quad , \quad e^{-\omega t} = ch(\omega t) - sh(\omega t)$

بالتعويض نجد..

$$r = c_1[ch(\omega t) + sh(\omega t)] + c_2[ch(\omega t) - sh(\omega t)]$$

$$r = (c_1 + c_2)\, ch(\omega t) + (c_1 - c_2)\, sh(\omega t)$$

نفرض أنَّ: $A = c_1 + c_2$ و $B = c_1 - c_2$

وبذلك: $r = A\, ch(\omega t) + B\, sh(\omega t) \ldots\ldots\ldots **$

لتعيين $A, B$ من شروط البدء: $((r = r_0 \ , \ r' = r'_0 \ , \ t = 0 \ ))$

بالاشتقاق .. $r' = A\omega\ sh(\omega t) + B\omega\, ch\,(\omega t)$

وبتعويض شروط البدء : $r'_0 = B\omega \Longrightarrow B = \frac{r'_0}{\omega}$

لإيجاد A نعوِّض شروط البدء في ** فنجد ... $A = r_0$

بتعويض $A, B$ في ** وبذلك نحصل على:

وهو الحل العام لمعادلة القوة

$$r = r_0\, ch(\omega t) + \frac{r'_0}{\omega}\, sh(\omega t)$$

بحيث $r_0$ نصف القطر الشعاعي للمتحرك في النقطة المادية في لحظة البدء.
$r'_0$ سرعته في تلك اللحظة.

ولمعرفة المسار نسقط على محورين $(x, y)$ موازيين للمحورين $(r_0, r'_0)$، فنحصل على الشَّكلِ التَّالي:

$$x = r_0\, ch(\omega t) \Longrightarrow ch(\omega t) = \frac{x}{r_0}$$

$$y = \frac{r'_0}{\omega}\, sh(\omega t) \Longrightarrow sh(\omega t) = \frac{y}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)}$$

نربع $(x, y)$ ثم نطرح فنجد .....

$$\boxed{\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{r'_0}{\omega}\right)^2} = 1}$$

وهي معادلة قطع زائد

## مثال (4)

**أدرس حركة نقطة مادية تخضع لقوة من الشكل(( $F = -\frac{mk}{r^2}$ ))**

## الحل

هذه قوة مركزية جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد.
حسب دستور بينييه الثاني ..

$$\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)$$

بتعويض بقانون التحريك الاساسي نجد... $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

$$-mc^2u^2(u'' + u) = -m\frac{k}{r^2} \quad ; \quad \frac{1}{r^2} = u^2$$

$$-mc^2u^2(u'' + u) = -m\, k\, u^2$$

$$c^2(u'' + u) = k \Longrightarrow u'' + u = \frac{k}{c^2} \ldots\ldots\ldots *$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة مع طرف ثاني.

الحل العام لها دون طرف ثان من الشكل: $u_1 = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t}$

$$u'' + u = 0$$

لإيجاد المعادلة المميزة نفرض أنَّ: $u = e^{\lambda t}$

$$u_1' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow u_1'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

نعوض في $(*)$ فنجد ......

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$$

نقسم على $e^{\lambda t}$ فنجد:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \mp i$$

بتعويض :

$$u_1 = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

نعلم أن: $e^{it} = cos(\alpha) + i\, sin(\alpha)$ , $e^{-it} = cos(\alpha) - i\, sin(\alpha)$

ومنه

$$u_1 = c_1[cos(\alpha) + i\, sin(\alpha)] + c_2[cos(\alpha) - i\, sin(\alpha)]$$

بفرض $A = (c_1 + c_2)$ , $B = i(c_1 - c_2)$

$$u_1 = A\, cos(\alpha) + B\, sin(\alpha)$$

نفرض $[A = a\, cos(\varphi)\,,\ B = -a\, sin(\varphi)]$

$$u_1 = a\, cos(\varphi)\,.\,cos(\alpha) - a\, sin(\varphi)\,.\,sin(\alpha)$$

**تذكرة :** $cos(a+b) = cos(a)\,.\,cos(b) - sin(a)\,.\,sin(b)$

$$u_1 = a\, cos(\varphi + \alpha)$$

و هو الحل العام دون طرف ثاني.

لنوجد الحل الخاص من الشكل $u_2 = \frac{k}{c^2}$ و هي عبارة عن ثابت من الشكل $u_2 = A$

بالاشتقاق $u_2' = 0 \Longrightarrow u_2'' = 0$

نعَوض في $u'' + u = \frac{k}{c^2}$ فنجد :

$$0 + A = \frac{k}{c^2} \Longrightarrow A = \frac{k}{c^2} \Longrightarrow \boxed{u_2 = \frac{k}{c^2}}$$

و هو الحل الخاص

فأصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثان هو:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u = a\, cos(\varphi + \alpha) + \frac{k}{c^2} \qquad ; \qquad u = \frac{1}{r}$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + a\, cos(\varphi + \alpha)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية مع طرف ثاني، حيث $a,\alpha$ ثوابت التكامل.

إذا أخذنا المحور القطبي بحيث تكون $\alpha = 0$ نحصل على:

$$u = \frac{k}{c^2} + a\cos(\varphi)$$

بإخراج $\left(\left(\frac{k}{c^2}\right)\right)$ عامل مشترك نجد... $u = \frac{k}{c^2}\left(1 + \frac{a\,c^2}{k}\cos(\varphi)\right)$

وأيضاً يمكن أن نكتبه بالشكل :

$$\boxed{r = \frac{P}{1 + e\cos(\varphi)}}$$

$r$ هو قانون قطع مخروطي ((دائرة - قطع مكافئ - ناقص - زائد -...))

حيث: $P = \frac{c^2}{k}$ وسيط المسار و $e = \frac{ac^2}{k}$ التباعد المركزي.

**نميز الحالات :**

إذا كان $e < 1$ فالمسار هو قَطع ناقص وإذا كانَ $e = 1$ فالمَسار هو قطع مكافِئ.

إذا كانَ $e > 1$ فالمسار هو قَطع زائد وإذا كان $e = 0$ فالمسار هو قطع دائرة.

## قانون التجاذب بين الكواكب

يوجد في ميكانيك السماوي ثلاثة قوانين توصل لها العالم كبلر اعتماداً على كثير من التجارب الفلكية وتنص هذه القوانين على ما يلي:

**القانون الأول :** تتحرك الكواكب حول الشمس ومسار كل منها مستوي وحركتها تكون خاضعة لقانون السطوح

**القانون الثاني :** مسار كل كوكب قطع ناقص تقع الشمس في إحدى محرقيه.

**القانون الثالث :** مربع دور حركة كل منها يتناسب عكساً مع مكعب نصف المحور الكبير للقطع الناقص وبالتالي استطاع العالم نيوتن من قوانين كلبر ان يوجد ذلك القانون الذي بموجبه تتغير القوة المؤثرة على الكوكب أثناء حركته حول الشمس ، بالاعتماد على دستور بينيه الثاني :

$$\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)$$

وبما أن المسار قطع ناقص (( مخروطي)) فهذا يعني أن : $u = \frac{(1+e.\cos\theta)}{P}$

$$u' = \frac{-e.\sin\theta}{P} \Longrightarrow u'' = \frac{-e.\cos\theta}{P}$$

ومنه بتعويض كل من $u^2, u, u''$ بقانون القوة المركزية :

$$F = -m.c^2u^2(u'' + u)$$

نحصل على **قانون التجاذب الشهير**

$$\boxed{F = -\frac{mc^2}{r^2P}}$$

وهي القوة المؤثرة على الكوكب اثناء حركته .

من هذه الصيغة تبين أن المجموعة الشمسية بحركتها حول الشمس تكون مجذوبة بقوة تتناسب عكساً مع مربع بعد كل كوكب عن الشمس، وبالتالي فإن قانون كبلر الثالث ينص على أن $\frac{a^3}{T^2} = const$

باعتبار أن ( $a$ ) هو عبارة عن نصف المحور الكبير للقطع الناقص و( $T$ ) مدة دورة كاملة لحركة الكوكب حول الشمس.إذ لا حظنا أن ( $\lambda$ ) ثابت غاوس ، من أجل الأجسام المتحركة سيكون له قيمة موافقة لذلك $F_1 = \frac{-\mu\, m}{r^2}$ حيث $m$ كتلة الأرض والشمس ستجذب الأرض بالقوة $F_1$، أما الأرض تجذب الشمس بقوة $F_2 = \frac{-\lambda\, M}{r^2}$ حيث $M$ كتلة الشمس و $\mu = \frac{4\,\pi^2 a^3}{T^3}$ ثابت غاوس

حسب قانون الفعل ورد الفعل يكون $F_1 = F_2 = |F| \ldots (1)$

إذاً $-\frac{\mu\, m}{r^2} = -\frac{\lambda\, M}{r^2} \Rightarrow \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda_n}{m_n} = const$

حيث $\frac{\lambda_n}{m_n} = f$ تسمى نسبة غاوس الثابتة لكل كوكب ما على كتلته .

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f$$

$$\mu = fM \qquad ; \qquad \lambda = fm$$

وبالتالي بتعويض قيمة ( $\lambda$ , $\mu$ ) بالمساواة $(1)$ نحصل على القانون :

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\lambda M}{r^2} \Rightarrow \boxed{F = f\,\frac{Mm}{r^2}}$$

يتبين من هذه الصيغة أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما البعض بقوى تتناسب طرداً مع جداء كتلتيهما وعكساً مع مربع البعد بينهما وبالتالي عند استخراج هذا القانون اعتبرنا مركز الجذب (( الشمس)) موضع ثابت ولكن نعلم أن الشمس متحركة وهذا ما يدل على أن قانون التجاذب ليس بقانون دقيق ولا بد أن نأخذ حركة الشمس بيد الاعتبار وكل المعادلة نأخذ $n$ كوكب .

**وظيفة** يدور إلكترون حول نواة ذروته بمسار دائري وبسرعة ثابتة $v$ أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسية لمساره. **والمطلوب** عين السرعة الواجب تطبيقها لكي يفلت من جذب النواة.

إعداد: محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي

انتهت المحاضرة