

برهنة

لقد افهنا و sets فئة الهيكليات و لكن $x \in \text{ob}(L)$ و لكن $F \rightarrow \text{sets}$ و لكن F

لفرض ان $\text{hom}(h_x, F)$ فيه مورفزمات الماتية $\sim h_x$ الى F عن طريق α

$$\alpha: \text{hom}(h_x, F) \rightarrow F(x)$$

بيان وغار

انتهى المحاضرة

المحاضرة الثامنة

لنبرهن المبرهنة التالية في المحاضرة السابقة (في الاكسول)

البرهان

ليكن $f \in \text{hom}(h_x, F)$ و $f: h_x \rightarrow F$ مورفزم دالي نوجد كل $y \in \text{ob}(L)$ يوجد مورفزم $f(y): h_y \rightarrow F(y)$ و $f(y): L(x, y) \rightarrow F(y)$ و $\forall u \in L(x, y); f(y)(u) = F(y)(f(x)(u))$ نضع $y = x$ لنضع:

$$\alpha(f) = f(x)(I_x) \in F(x)$$

لنضع:

$$\beta: F(x) \rightarrow \text{hom}(h_x, F)$$

$\forall \xi \in F(x)$ لنضع مورفزم دالي $\beta(\xi)$:

$$\beta(\xi): h_x \rightarrow F$$

نوجد كل $y \in \text{ob}(L)$ لنضع:

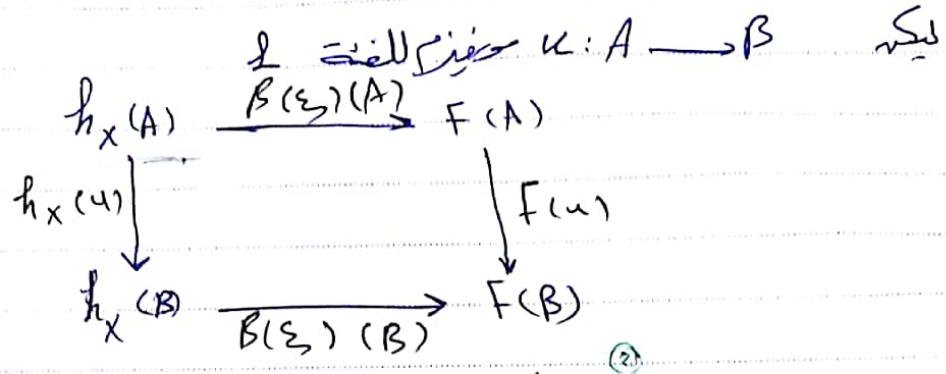
$$\beta(\xi)(y): h_y \rightarrow F(y)$$

$$\beta(\xi)(y): L(x, y) \rightarrow F(y)$$

$$\forall \lambda \in L(x, y); \beta(\xi)(y)(\lambda) = F(y)(\xi)(\lambda) \in F(y) \quad *$$

لنبرهن على ان $\beta(\xi)$ مورفزم دالي

$$\forall y \in \text{ob}(L); \beta(\xi)(y)$$



نلاحظ أن: $F(u) \cdot \beta(\xi)(A) = \beta(\xi)(B) \cdot h_x(u)$ *
 $u \in h_x(A) = \mathcal{L}(x, A)$: كالتالي

الطرف الأيمن: $F(u) \cdot \beta(\xi)(A)(v) = F(u) (\beta(\xi)(A)(v))$
 $= F(u) (F(v) \cdot (\xi))$ *
 $F(u) \cdot F(v) \cdot (\xi) = \boxed{F(u \cdot v) \cdot (\xi)}$ ①

الطرف الأيسر: $\beta(\xi)(B) \cdot h_x(u)(v) = \beta(\xi)(B) (h_x(u)(v))$
 $= \beta(\xi)(B) (u \cdot v)$
 $= \boxed{F(u \cdot v) \cdot (\xi)}$ ②

فإن $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

$\alpha: \text{Hom}(x, F) \rightarrow \text{Hom}(h_x(x), F)$

$\beta: F(x) \rightarrow \text{Hom}(h_x(x), F)$

$\alpha \cdot \beta = I_{F(x)} \rightarrow \beta \cdot \alpha = I_{\text{Hom}(h_x(x), F)}$ نلاحظ أن

$\forall \xi \in F(x); \alpha \cdot \beta(\xi) = \alpha(\beta(\xi))$

$\forall y \in \text{ob}(\mathcal{L}), \alpha \cdot \beta(\xi)(y) = h_x(y) \rightarrow F(y)$

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(x, y); \alpha \cdot \beta(\xi)(y)(\lambda) = \alpha(\beta(\xi)(y)(\lambda))$
 $= \alpha(F(\lambda) \cdot (\xi))$

فإن $\mathcal{L} \rightarrow \text{sets}$

$f: \mathcal{L}(x, y) \rightarrow F(y)$

عند $y = x, \lambda = I_x$ *
 $\alpha \cdot \beta(\xi)(x)(I_x) = \alpha(\beta(\xi)(x)(I_x))$

$= \alpha(F(I_x) \cdot (\xi)) = \alpha(I_{F(x)} \cdot (\xi)) = \alpha(\xi)$

$= \alpha(\xi)$

جداد الصفة :
تعريف : لكل $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين لتعرف $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ المولدة من
1- تطبيعاً حيث

$$\text{ob}(\mathcal{L}) = \text{ob}(\mathcal{L}_1) \times \text{ob}(\mathcal{L}_2)$$
$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{L}); A = (A_1, A_2)$$
$$A_i \in \text{ob}(\mathcal{L}_i) \quad i=1,2$$

2- كالمجموع المورفزمات :

$$\text{Mor}(\mathcal{L}) = \text{Mor}(\mathcal{L}_1) \times \text{Mor}(\mathcal{L}_2)$$
$$\forall f \in \mathcal{L}(A, B); f = (f_1, f_2) \text{ و } A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2)$$

$$f_i : A_i \rightarrow B_i \in \mathcal{L}_i(A_i, B_i)$$

فكرة اخرى
للك \mathcal{L}_1 و \mathcal{L}_2 فئتين
 $F : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ و $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$
دوال مباشرة عندئذ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}}(G) : \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \rightarrow \text{Set}^S$$

(2) يوجد دوال مباشرة
 $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(F) : \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \rightarrow \text{Set}^S$

الجان : لتعرف $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(G)$ المولدة من

لكل $(A, B) \in \text{ob}(\mathcal{L})$ لتضع :

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}}(G)(A, B) = \mathcal{L}(A, G(B)) \in \text{Set}^S$$

و لكل $f : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{L})$

$$f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \longrightarrow B = (B_1, B_2) \quad \text{نظراً}$$

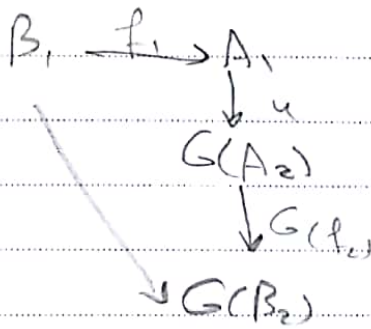
$$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \in \mathcal{L}(A_1, B_1)$$

$$f_2 : A_2 \longrightarrow B_2 \in \mathcal{L}(A_2, B_2)$$

$$f_1 : B_1 \longrightarrow A_1 \in \mathcal{L}(B_1, A_1)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(B) \quad \text{لنضع}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))$$



$$\forall u \in \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2))$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(u) = G(f_2) \circ u \circ f_1 \quad \text{لنضع}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G(A_1, A_2))$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G(A_1, A_2)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G(B_1, B_2))$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))$$

انتهت الحجة

ادعو لي بالخبر والصحة والعافية

Reem Nablasy