مبرهنة:

لتكن $\mathcal{L}$ فئة و sets فئة المجموعات ولتكن $X \in ob(\mathcal{L})$ ولتكن $F: \mathcal{L} \to sets$ دالي مباشر، ولنفرض أن $hom(h_X, F)$ صف مورفيزمات الدالية من h_X الى F. عندئذٍ يوجد تطبيق

$$\alpha : hom(h_X, F) \longrightarrow F(X)$$

تباين وغامر.

انتهت المحاضرة

المحاضرة الثامنة:

لنبرهن المبرهنة الأخيرة في المحاضرة السابقة (في الأعلى) ⇑

البرهان:

ليكن $f \in hom(h_X, F)$ أي أن $f: h_X \longrightarrow F$ مورفيزم دالي، لأجل كل $Y \in ob(\mathcal{L})$ يوجد مورفيزم $f(Y): h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$

$$f(Y): \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow F(Y)$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(X, Y);\ f(Y)(u) \in F(Y)$$

لأجل $Y = X$ لنضع:

$$\alpha(f) = f(X)(I_X) \in F(X)$$

لنعرف:

$$\beta : F(X) \longrightarrow hom(h_X, F)$$

$\forall \xi \in F(X)$ لنعرف مورفيزم دالي بالشكل الآتي:

$$\beta(\xi) : h_X \longrightarrow F$$

لأجل كل $Y \in ob(\mathcal{L})$ لنضع:

$$\beta(\xi)(Y) : h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$$

$$\beta(\xi)(Y) : \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow F(Y)$$

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathcal{L}(X, Y);\ \beta(\xi)(Y)(\lambda) = F(\lambda)(\xi) \in F(Y)}$$

لنبرهن على أن $\beta(\xi)$ مورفيزم دالي

$\forall Y \in ob(\mathcal{L});\ \beta(\xi)(Y)$ تطبيق

Subject / /

ليكن $u: A \longrightarrow B$ مورفزم للفئة $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd}
h_X(A) \arrow[r, "\beta(\xi)(A)"] \arrow[d, "h_X(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\
h_X(B) \arrow[r, "\beta(\xi)(B)"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

* لنبرهن على أن: ① $F(u).\beta(\xi)(A) = \beta(\xi)(B).h_X(u)$ ②

ليكن: $x \in h_X(A) = \mathcal{L}(X,A)$

الطرف الأول $F(u).\beta(\xi)(A)(x) = F(u)\left(\beta(\xi)(A)(x)\right)$

$= F(u)\left(F(x).(\xi)\right)$ من *

$F(u).F(x).(\xi) = \boxed{F(u.x)(\xi)}$ ①'

الطرف الثاني ② $\beta(\xi)(B)\, h_X(u)(x) = \beta(\xi)(B)\left(h_X(u)(x)\right)$

$= \beta(\xi)(B)(u.x)$

$= \boxed{F(u.x)(\xi)}$ ②

من ① و ②

هذا يبين ان $\beta(\xi)$ مورفزم دالي

لنبرهن على أن $\alpha.\beta = I_{F(X)}$, $\beta.\alpha = I_{hom(h_X,F)}$

$\forall \xi \in F(X);\ \alpha.\beta(\xi) = \alpha(\beta(\xi))$

$\forall Y \in ob(\mathcal{L}),\ \alpha.\beta(\xi)(Y): h_X(Y) \longrightarrow F(Y)$

$\forall \lambda \in \mathcal{L}(X,Y),\ \alpha.\beta(\xi)(Y)(\lambda) = \alpha\left(\beta(\xi)(Y)(\lambda)\right)$

$= \alpha\left(F(\lambda)(\xi)\right)$

نأخذ $\lambda = I_X$, $Y = X$ فإن

$\alpha.\beta(\xi)(Y)(\lambda) = \alpha(\beta(\xi)(X))(I_X)$

$= \alpha(F(I_X)(\xi)) = \alpha(I_{F(X)}(\xi)) = \alpha(\xi)$

~~$\alpha \cdot \beta(\xi) = \alpha(\beta(\xi)) = \beta(\xi)(X)(I_X)$~~

$$\alpha \cdot \beta(\xi) = \alpha(\beta(\xi)) = \beta(\xi)(X)(I_X)$$
$$= F(I_X)(\xi) = I_{F(X)}(\xi) = \xi$$

$$\alpha \cdot \beta = I_{F(X)}$$

$$\beta \cdot \alpha = I_{hom(h_X, F)}$$

$$\forall f \in hom(h_X, F);\ \beta \cdot \alpha(f) = \beta(\alpha(f)) = \beta(f_{(X)}(I_X))$$

أيا كان $Y \in ob(\mathcal{L})$ ولأجل كل $\lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\beta\alpha(f)(Y)(\lambda) = \beta(f(X)(I_X))(Y)(\lambda)$$
$$= F(\lambda) \cdot f(X)(I_X) \quad ♡$$

ولأجل كل $\lambda : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$. لدينا المخطط تبديلي

$$\begin{tikzcd}
h_X(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "h_X(\lambda)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\lambda)"] \\
h_X(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

$$F(\lambda) \cdot f(X) = f(Y) \cdot h_X(\lambda)$$

بالتعويض بـ ♡ نجد !

$$F(\lambda)\ f(X)(I_X) = f(Y)\ h_X(\lambda)(I_X)$$
$$= f(Y)(\lambda \cdot I_X) = f(Y)(\lambda)$$

ومنه $\beta \cdot \alpha(f) = f$ وبالتالي $\beta \cdot \alpha = I_{hom(h_X, F)}$

وهكذا يكون α تقابل $\Rightarrow$

/ /

جداء الفئة :

تعريف: ليكن $\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2$ صنفين نعرف $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$ المؤلف من

1- تجميع الاشياء:

$$ob(\mathcal{L}) = ob(\mathcal{L}_1)\times ob(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall A\in ob(\mathcal{L}) ;\ A=(A_1,A_2)$$

$$A_i \in ob(\mathcal{L}_i) \quad i=1,2$$

2- تجميع المورفيزمات:

$$Mor(\mathcal{L}) = Mor(\mathcal{L}_1)\times Mor(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall f\in\mathcal{L}(A,B);\ f=(f_1,f_2): A=(A_1,A_2)\longrightarrow B=(B_1,B_2)$$

$$f_i : A_i\longrightarrow B_i \in \mathcal{L}_i(A_i,B_i)$$

جبر قضية: ليكن $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ صنفين

$$F:\mathcal{L}_1\longrightarrow\mathcal{L}_2 \quad , \quad G: \mathcal{L}_2\longrightarrow\mathcal{L}_1$$

دوال مباشرة عندئذ:

1- يوجد دالي مباشر

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G) : \mathcal{L}=\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2\longrightarrow set's$$

2 يوجد دالي مباشر

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F) : \mathcal{L}=\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2 \longrightarrow set's$$

البرهان: لنعرف $Hom_{\mathcal{L}_1}(G)$ بالشكل الآتي:

لأجل كل $(A,B)\in ob(\mathcal{L})$ لنضع:

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A,B) = \underline{\mathcal{L}_1(A,G(B))} \in set's$$

لأجل كل $f:A\longrightarrow B\in Mor(\mathcal{L})$

/ /

$f=(f_1,f_2):A=(A_1,A_2)\longrightarrow B=(B_1,B_2)$ حيث

$f_1:A_1\longrightarrow B_1\in \mathcal{L}(A_1,B_1)$

$f_2:A_2\longrightarrow B_2\in \mathcal{L}(A_2,B_2)$

$f_1:B_1\longrightarrow A_1\in \mathcal{L}_1(B_1,A_1)$

لنضع

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f):Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A)\longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(B)$

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f):\mathcal{L}_1(A_1,G(A_2))\longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1,G(B_2))$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\ & & \downarrow u \\ & & G(A_2) \\ & & \downarrow G(f_2) \\ & & G(B_2) \end{array}$$

$\forall u\in \mathcal{L}_1(A_1,G(A_2))$

لنعرف $Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(u)=G(f_2)uf_1$

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f):Hom_{\mathcal{L}_1}(G(A_1,A_2))$

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f):Hom_{\mathcal{L}_1}(G(A_1,A_2))\longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G(B_1,B_2))$

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f):\mathcal{L}_1(A_1,G(A_2))\longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1,G(B_2))$

انتهت المحاضرة

ادعو لي بالخير والصحة والعافية

Reem Nablsy