نظري

◄ دكتورة المادة: ريم الحاج خليفة

◄ المحاضرة: العاشرة عنوان المحاضرة: التشاكل الحلقي

المحتوى العلمي :

١- تعريف التشاكل الحلقي .

٢- تعريف نواة التشاكل الحلقي.

٣-مبرهنة تخص خواص التشاكل الحلقي + مبرهنات وامثلة للتشاكلات والمثاليات.

التشاكل الحلقي

تعريف : ليكن $(\mathcal{R},+,.),(S,+,.)$ حلقتين عندئذٍ نسمي كل تطبيق $f:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تشاكلاً حلقياً اذا تحققت الشروط الآتية :

$$\forall a,b\in\mathcal{R};$$

١- $$f\Big(a\underbrace{+}_{\text{معرف على }\mathcal{R}}b\Big)=f(a)\underbrace{+}_{\text{معرف على }S}f(b)$$

٢- $$f(a.b)=f(a).f(b)$$

٣- $$f(1_{\mathcal{R}})=1_S$$

تعريف : ليكن $f:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تطبيق تشاكل حلقي نسمي المجموعة :

$ker\,f=\{a:a\in\mathcal{R}\ ,\ f(a)=0\}$ بنواة التشاكل الحلقي f

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{R},S$ حلقتين والتطبيق $f:\mathcal{R}\longrightarrow S$ تشاكل حلقي عندئذٍ الشروط الآتية متوفرة :

١- $f(0)=0$

٢- $\forall\ a\in\mathcal{R}\,;f(-a)=-f(a)$

٣- إذا كان $a\in\mathcal{R}$ عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ عندئذٍ $f(a)$ هو عنصر قابل للقلب في S حيث

. $f(a^{-1})=\left(f(a)\right)^{-1}$

٤- أياً كان العدد الصحيح الموجب n فإنه يتحقق :

$$f(a^n)=\left(f(a)\right)^n$$
$$f(na)=nf(a)$$

٥- إذا كانت A حلقة جزئية من $\mathcal{R}$ فإن $f(A)$ حلقة جزئية في S .

٦- $ker\,f$ تشكل حلقة جزئية في $\mathcal{R}$.

التشاكل f متباين عندما وفقط عندما يكون $ker\,f=\{0\}$

البرهان

١- إن $f(0)$ يمكن أن تكتب بالشكل : $f(0)=f(0+0)$ وبما أن f تشاكل حلقي فإن $f(0)=f(0)+f(0)$ نطرح من الطرفين $f(0) \Leftarrow 0=f(0)$.

٢- ليكن $a\in\mathcal{R}$ عندئذ $-a\in\mathcal{R} \Leftarrow -a+a=0$ حسب الطلب (١) وبما أن f تشاكل حلقي يكون لدينا

$$f\Big(\underbrace{-a+a}_{=0}\Big)=f(-a)+f(a)=f(0)=0$$

نطرح من الطرفين $-f(a)$

$\Leftarrow f(-a)=-f(a)$

٣- ليكن $a\in\mathcal{R}$ عنصراً قابلاً للقلب في $\mathcal{R}$ عندئذٍ يوجد عنصر $a^{-1}\in\mathcal{R}$ يحقق

$$1=a.a^{-1}=a^{-1}.a$$

بما أن f تشاكل حلقي فإن

$$1=f(1)=f(a.a^{-1})=f(a).f(a^{-1})$$

لنضرب الطرفين ب $\left(f(a)\right)^{-1}$

$$\Rightarrow f(a^{-1})=\left(f(a)\right)^{-1}$$

٤- ليكن $a\in\mathcal{R}$ وليكن $n>0$ عدداً صحيحاً موجباً عندئذٍ

- $$f(na)=f(\underbrace{a+a+\cdots\ldots+a}_{n\text{ مرة}})$$
$$=\underbrace{f(a)+f(a)+f(a)+\cdots+f(a)}_{n\text{ مرة}}=nf(a)$$

- $$f(a^n)=f\Big(\underbrace{a.a\ldots\ldots a}_{n\text{ مرة}}\Big)=\underbrace{f(a).f(a)\ldots.f(a)}_{n\text{ مرة}}=f(a)^n$$

٥- تذكرة◄ نقول عن مجموعة ما ولتكن المجموعة S أنها حلقة جزئية إذا تحقق الشرطان :

- $\forall a.b \in S \,;\, a-b \in S$
- $\forall\, a,b \in S \,;\, a.b \in S$

بفرض أن A حلقة جزئية في $\mathcal{R}$ فإن $f(A)=\{f(a) \quad ; \quad a\in A\}$ وبما أن $0\in A$ عندئذٍ $f(0)\in f(A)$ إذاً $f(A)\neq\emptyset$.

ليكن $x,y\in f(A)$ عندئذٍ يوجد $a,b\in A$ بحيث $f(b)=y \quad , \quad f(a)=x$

$$x-y=f(a)-f(b)=f(a)+\underbrace{f(-b)}_{\text{حسب الخاصية 2}}=f\left(\underbrace{a-b}_{\in A}\right)\in f(A)$$

فالشرط الأول محقق لنتحقق من الشرط الثاني

$$x.y=f(a).f(b)=f\left(\underbrace{a.b}_{\in A}\right)\in f(A)$$

والشرط الثاني محقق ومنه $f(A)$ حلقة جزئية في S .

٦. حسب التعريف◄ **(أي عنصر موجود في $kerf$ صورته تساوي الصفر)**

إن $kerf\neq\emptyset$ لأن $\mathbf{0}\in\mathcal{R}$ وأن f تشاكل حلقي ومنه

$$\boldsymbol{f(0)=0}\Rightarrow 0\in ker\,f$$

ومن جهة أخرى :

$$ker\,f\subseteq R$$

<u>ولنتحقق من شرطي الحلقة الجزئية</u>

ليكن $a,b\in ker(f)$ عندئذٍ $f(b)=0 \quad , \quad f(a)=0$

- $f(a-b)=f(a)-f(b)=0 \quad \Leftarrow \quad a-b\in ker(f)$
- $f(a.b)=f(a).f(b)=0 \quad \Leftarrow \quad a.b\in ker(f)$

<u>ومنه $\boldsymbol{ker\,f}$ حلقة جزئية .</u>

٧. واضح أنه إذا كان f متباين فإن $ker\,f=\{0\}$.

<u>لم يتم برهان هذا الطلب من قبل الدكتورة ولكن سوف نورد لكم البرهان</u>

البرهان

- **لنفرض أن $ker\, f = \{0\}$ ولنثبت أن f متباين .**

$$\forall x,y \in \mathcal{R} \;\; ; \;\; f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x-y) = 0$$
$$\Rightarrow x - y \in ker\, f \; = \{0\}$$
$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

وبالتالي f متباين .

- لنفرض أن $f: \mathcal{R} \to S$ متباين وبما أن $ker\, f$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$ فإن $0 \in ker\, f$ ومنه

$$\underbrace{\{0\} \subseteq ker\, f}_{*}$$

ولنثبت الاحتواء المعاكس ليكن $x \in ker\, f$ وبالتالي $f(x) = 0$

وبما أن f تشاكل حلقي وأن $f(0) = 0$ وبالتالي $f(x) = f(0)$ ومنه $x = 0$ لأن f متباين

$$\Longrightarrow \underbrace{ker\, f \subseteq \{0\}}_{**}$$

من * وَ ** نجد أن $ker\, f = \{0\}$

مبرهنة : ليكن R, S حلقتين ولدينا $f: R \longrightarrow S$ تشاكل حلقي عندئذ :

اذا كان B مثالي يساري (يميني) في R وكان f غامر فان $f(B)$ مثالي يساري (يميني) في S .

البرهان

ليكن B مثالي يساري في R وبما أن S تشاكل عندئذ :

$$f(B) = \{f(b) \quad ; \quad b \in B\}$$

ولنثبت أن $f(B)$ مثالي يساري في S أي لنثبت شرطي المثالي اليساري

- ليكن $x, y \in f(B)$ عندئذ يوجد $a, b \in B$ بحيث $x = f(a) \quad , \quad y = f(b)$

$$x - y = f(a) - f(b) = f(a-b) \in f(B)$$

ومنه $f(B)$ زمرة جزئية في S (مشابه للطلب الخامس في المبرهنة السابقة) .

- لنثبت الشرط الثاني $\forall s \in S$ عندئذ وبما أن f غامر فإنه يوجد $r \in R$ حيث $s = f(r)$
وليكن $x \in f(B)$ عندئذ يوجد $a \in B$ بحيث $x = f(a)$

$$\boldsymbol{s.x = f(r).f(a) = f\left(\underbrace{r.a}_{\in B}\right) \in f(B)}$$

لان B مثالي يساري

$\Longleftarrow f(B)$ مثالي يساري في S . (بنفس الطريقة تقريبا يبرهن على المثالي اليميني).

مبرهنة : ليكن R,S حلقتين ولدينا $f:R\longrightarrow S$ تشاكل حلقي عندئذ :

اذا كان D مثالي يساري (يميني) في S فان $f^{-1}(D)$ مثالي يساري (يميني) في R .

البرهان

بفرض D مثالي يساري في S عندئذ :

$$f^{-1}(D)=\{x:x\in R\quad;\quad f(x)\in D\}$$

ولنثبت شرطي المثالي اليساري أي $f^{-1}(D)$

- ليكن $x,y\in f^{-1}(D)$ عندئذ $f(x),f(y)\in D$ فإن $f(x)-f(y)\in D$

وبما أن f تشاكل فإن $f(x-y)\in D \Longleftarrow x-y\in f^{-1}(D)$

ومنه $f^{-1}(D)$ زمرة جزئية في R ومنه الشرط الأول محقق .

- $\forall r\in R$ عندئذ $f(r)\in S$ وليكن $x\in f^{-1}(D)$ ومنه

$$f(r.x)=\underbrace{f(r).f(x)\in D}_{\text{لان } D \text{ مثالي يساري في } S}$$

$$\Longrightarrow r.x\in f^{-1}(D)$$

$\Longleftarrow f^{-1}(D)$ مثالي يساري في R (بنفس الطريقة تقريبا يبرهن على المثالي اليميني)

مثال : برهن أن $\ker f=\{x:x\in\mathcal{R}\,,f(x)=0\}$ مثالي في $\mathcal{R}$.

البرهان

إن $0\in R$ فإن $f(0)=0 \Longleftarrow 0\in \ker f$

وبالتالي $\ker f\neq\emptyset$ ومن جهة أخرى $\ker f\subseteq R$

ليكن $a,b\in\ker(f)$ عندئذ $f(a)=0\quad,\quad f(b)=0$

- $f(a-b)=f(a)-f(b)=0 \qquad\Longleftarrow\qquad a-b\in\ker(f)$
- $\forall r\in\mathcal{R}$ ومنه

$$f(r.x)=f(r).f(x)=f(r).0=0\Rightarrow r.x\in\ker f$$

$$f(x.r)=f(x).f(r)=0.f(r)=0\Rightarrow x.r\in\ker f$$

الشرط الثاني محقق .

وبالتالي نجد أن $kerf$ مثالي في $\mathcal{R}$ أي أنه مثالي من اليمين ومن اليسار .

مثال: ليكن لدينا $(\mathcal{R},+,.)$, $(S,T,*)$ حلقتين ما ولنرمز لصفر الحلقة $(S,T,*)$ بالرمز $0'$

وليكن التطبيق : $\varphi:\mathcal{R}\longrightarrow S$

المعرف بالشكل : $\varphi(x)=0' \quad : \quad \forall x\in\mathcal{R}$

برهن أن التطبيق φ هو تشاكل للحلقة $\mathcal{R}$ في الحلقة $(S,T,*)$.

البرهان

(لإثبات أنه تشاكل حلقي نتأكد من الشروط الواردة بالتعريف وهي ثلاثة ولكن في التمارين اكتفت الدكتورة بالتحقق من اول شرطين فقط وذلك اعتماداً على بعض المراجع)

ليكن $x,y\in\mathcal{R}$ فإنه وبما أن $0'$ هي من الحلقة $(S,T,*)$ فإن :

$$\varphi(x+y)=0'=0' \underbrace{T}_{\text{العملية المعرفة على } S} 0'=\varphi(x)T\varphi(y)$$

$$\varphi(x.y)=0'=0' \underbrace{*}_{\text{العملية المعرفة على } S} 0'=\varphi(x)*\varphi(y)$$

الشرطين محققين $\Leftarrow$ φ تشاكل حلقي للحلقة $\mathcal{R}$.

انتهت المحاضرة

لنكمل برهان بقية طلبات المبرهنة في المحاضرة التاسعة

٧- بما أن الحلقة $\mathcal{R}$ واحدية فإن $1\in\mathcal{R}$ وبالتالي $\overline{1}=1+A$ وبالتالي

$$\overline{1}.\overline{x}=(1+A)(x+A)=(1.x)+A=x+A=\overline{x}$$

$$\overline{x}.\overline{1}=(x+A)(1+A)=(x.1)+A=x+A=\overline{x}$$

$\Leftarrow$ $\overline{1}$ هو عنصر محايد في $\overline{\mathcal{R}}$.

٨- لتكن $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\overline{\mathcal{R}}$ عندئذٍ :

$$\overline{x}=x+A \quad , \quad \overline{y}=y+A \quad , \quad \overline{z}=z+A$$

$$(\overline{x}.\overline{y}).\overline{z} = [(x+A)(y+A)].(z+A) = [(x.y)+A].(z+A)$$
$$= ((x.y).z)+A = \big(x(y.z)\big)+A = (x+A)\big((y.z)+A\big)$$
$$= (x+A).\big((y+A)(z+A)\big) = \overline{x}.(\overline{y}.\overline{z})$$

$\Leftarrow$ **عملية الضرب تجميعية في $\overline{\mathcal{R}}$.**

-٩ لتكن $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in \overline{\mathcal{R}}$:

سنبرهن أن ضرب توزيعي على الجمع من اليسار .

$$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = (a+A)[(b+A)+(c+A)] = (a+A)[(b+c)+A]$$
$$= [a(b+c)]+A = [ab+ac]+A = [(ab)+A]+[(ac)+A]$$
$$= \overline{ab}+\overline{ac}$$

سنبرهن أن ضرب توزيعي على الجمع من اليمين .

$$(\overline{b}+\overline{c})\overline{a} = [(b+A)+(c+A)](a+A) = [(b+c)+A](a+A) = [(b+c).a]+A$$

$$= [ba+ca]+A = [(ba)+A]+[(ca)+A] = \overline{b}\overline{a}+\overline{c}\overline{a}$$

$\Leftarrow$ **عملية الضرب توزيعية على الجمع من اليمين واليسار .**

-١٠ نجد أن الثلاثية $(\overline{\mathcal{R}},+,.)$ حلقة واحدية محققة من أجل جميع ما سبق .

وكُن لنفسك كُل شيء..♥

إعداد: هلا همج - لانا شهاب - أحمد أبو النوت

تنسيق: ولاء الأخضر ♥