6-5-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

◄ المحاضرة: السادسة عشرة والسابعة عشر والأخيرة☺

◄ عنوان المحاضرة: تمارين محلولة

المحتوى العلمي: أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـ ملخص طريقة شارب.

٢ـ حل بعض التمارين.

٣ـ حل جملة معادلات تفاضلية خطية.

ملخص طريقة شارب

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى غير الخطية نتبع ما يلي:

١− نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة: $F(x,y,z,p,q)=0\ldots(1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z},\frac{\partial F}{\partial p},\frac{\partial F}{\partial q}$$

ثم نعوض هذه المشتقات في الجملة المساعدة التالية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p.\frac{\partial F}{\partial p}+q.\frac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p.\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q.\frac{\partial F}{\partial z}}$$

٢− **نوجد أي حل عام للجملة المساعدة وليكن:** $\phi((x,y,z,p,q\ )\ +a)=0\ldots(2)$

شرط أن يحتوي على q أو p أو كلاهما.

٣− **نحل المعادلتين (1) و (2) بالنسبة ل $p\,,q$:**

$$(3)\begin{cases} p = p(x,y,z,a) \\ q = q(x,y,z,a) \end{cases}$$

ثم نعوض (3) في العلاقة (4):

$$dz = p.dx + q.dy \dots (4)$$

٤- نوجد حل المعادلة (4) وليكن من الشكل:

$$f(x,y,z,a,b) = 0 \dots (5)$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية من الأولى غير الخطية.

٥- لتكن $b = \tau(a)$ عندها:

$$f\big(x,y,z,a,\tau(a)\big) = 0 \dots (6)$$

هو الحل العام حيث $\tau(a)$ دالة اختيارية.

◄**ملاحظة**: إذا كانت $\tau(a)$ دالة معينة تكون (6) حلاً خاصاً .

إذا كان مغلف مجموعة السطوح (5) موجوداً فهو يمثل حلاً شاذاً .

مثال : أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية بطريقة شارب:

$$pq - px - qy = 0 \dots \dots .. (*)$$

الحل

لنوجد المشتقات الجزئية وذلك تبعاً لخطوات تلخيص فقرة شارب:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -p\ ,\frac{\partial F}{\partial y} = -q\ \ ,\frac{\partial F}{\partial z} = 0\ ,\frac{\partial F}{\partial p} = (x-q)\,,\frac{\partial F}{\partial q} = (y-p)$$

والآن نعوض المشتقات في الجملة الملحقة :

$$\frac{dx}{q-x}=\frac{dy}{p-y}=\frac{dz}{p(q-x)+q(p-y)}=-\frac{dp}{-p+p}=-\frac{dq}{-q+q}$$

$$\underbrace{\frac{dx}{q-x}}_{1}=\underbrace{\frac{dy}{p-y}}_{2}=\underbrace{\frac{dz}{2pq-px-qy}}_{3}=-\underbrace{\frac{dp}{-p}}_{4}=-\underbrace{\frac{dq}{-q}}_{5}$$

الأسهل لنا كحل أن نأخذ النسبتين $(4)\&\&(5)$ حيث سنحصل على p أو q ومنه:

$$4=5\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}\xrightarrow{\text{بالمكاملة}}\ln p=\ln q+\ln a\Rightarrow p=aq\ldots(♥)$$

والآن نعوض قيمة p في $(*)$ فنحصل على q :

$$aq^2-aqx-qy=0$$
$$q(aq-ax-y)=0$$

نميز حالتين :

$$ei:\ q=0\ \ (\text{مرفوض})$$

لأن q تابع ل x,y,z . **إذاً:**

$$aq-ax-y=0\Rightarrow q=\frac{ax+y}{a}\Rightarrow q=x+\frac{y}{a}$$

نعوض q في ♥ فنحصل على: $p=ax+y$

نعوض p و q في المعادلة الكلية:

$$dz=pdx+qdy$$

$$dz=(ax+y)dx+\left(x+\frac{y}{a}\right)dy$$

$$dz=axdx+ydx+xdy+\frac{y}{a}dy\Rightarrow dz=axdx+\frac{y}{a}dy+d(x.y)$$

نكامل:

$$z=\frac{a}{2}x^2+\frac{y^2}{2a}+x.y+\underbrace{b}_{\text{ثابت التكامل الجديد}}$$

وهو الحل التام المطلوب وبالطريقة المطلوبة...

◄ملاحظة: ((مشتق جداء)) $y.dx+x.dy=d(x+y)=d(x.y)+d(y.x)$

تمرين: أوجد الحل التام للمعادلة التالية بطريقة شارب:

$$(z+px)^2-q=0\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

الحل

١) لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2p(z+px)\quad\&\quad\frac{\partial F}{\partial y}=0\quad\&\quad\frac{\partial F}{\partial z}=2(z+px)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=2x(z+px)\quad\&\quad\frac{\partial F}{\partial q}=-1$$

٢) نعوض هذه المشتقات في الجملة الملحقة:

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=\frac{dy}{0-1}=\frac{dz}{2xp(z+px)+q(-1)}=-\frac{dp}{2p(z+px)+2p(z+px)}$$
$$=-\frac{dq}{0+2q(z+px)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\frac{dx}{2x(z+px)}}_{1}=\underbrace{\frac{dy}{-1}}_{2}=\underbrace{\frac{dz}{2xp(z+px)-q}}_{3}=\underbrace{-\frac{dp}{4p(z+px)}}_{4}=\underbrace{-\frac{dq}{2p(z+px)}}_{5}$$

من $(1)\&\&(4)$ نجد :

$$\frac{dx}{2x(z+px)}=-\frac{dp}{4p(z+px)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p} \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln x = -\frac{1}{2}\ln p + \ln \alpha$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln p^{-\frac{1}{2}} + \ln a \Rightarrow x = ap^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{p^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow p^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{x}$$

$$\xRightarrow{\text{بالتربيع}} p = \frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{q}{x^2}(\text{باعتبار أن } \alpha^2 = a') \Rightarrow \boldsymbol{p = \frac{a'}{x^2}}$$

والآن نعوض p في المعادلة $(*)$ ومنه :

$$\left(z + \frac{a'}{x^2}x\right)^2 - q = 0 \Rightarrow q = \left(z + \frac{a'}{x^2}x\right)^2 = \left(z + \frac{a'}{x}\right)^2$$

نعوض p و q في المعادلة الكلية والتي من الشكل:

$$dz = pdx + qdy \Rightarrow dz = \frac{a'}{x^2}dx + \left(z + \frac{a'}{x}\right)^2 dy$$

$$dz - \frac{a'}{x^2}dx - \left(z + \frac{a'}{x}\right)^2 dy = 0$$

$$d\left(z + \frac{a'}{x^2}\right) - \left(z + \frac{a'}{x}\right)^2 dy = 0$$

$$dy = \frac{d\left(z - \frac{a'}{x^2}\right)}{\left(z + \frac{a'}{x}\right)^2}$$

$$dy = \frac{d(\text{متحول})}{\text{متحول}}$$

بالمكاملة نجد :

$$y + \underbrace{b}_{\text{ثابت التكامل}} = -\frac{1}{z + \frac{a'}{x}} \ldots (💔)$$

$$\Rightarrow z + \frac{a'}{x} = -\frac{1}{(y+b)} \Rightarrow z - \frac{a'}{x} - \frac{1}{y+b} = 0$$

وهو الحل التام.

◄ملاحظة:

$$d\left(z+\frac{a'}{x}\right)=d(z)+d\left(\frac{a'}{x}\right)=d(z)+\left(-\frac{a'}{x^2}\right)dx=d\left(z-\frac{a'}{x^2}\right)$$

للحصول على z من العلاقة 💔 نجد:

$$z+\frac{a'}{x}=-\frac{1}{y+b}$$

والحل العام يكون:

$$z=-\frac{a'}{x}-\frac{1}{y+\psi(a')} \quad : \quad b=\psi(a')$$

حل جملة معادلات تفاضلية خطية

يتم حل المعادلات التفاضلية الخطية بعدة طرق منها:

١- الحصول على الشكل التناظري لجملة المعادلات الخطية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P} \qquad \& \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}$$

فالشكل التناظري هو إرجاعها إلى الشكل التناظري التالي:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

وبمكاملة الحل من معادلتي الجملة نحصل تكاملها العام ثم نعزل المتغيرات المستقلة $y\,,z$ فنحصل على جملة المعادلات الخطية😃.

٢- **طريقة الحذف :** نقوم في هذه الطريقة بتشكيل معادلة تفاضلية عادية في أحد الدوال المجهولة في الجملة فإذا أمكن مكاملة المعادلة الناتجة نكون قد حصلنا على الحل لهذه الجملة.

٣- **طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) .**

مثال1 (على الطريقة الأولى): لتكن لدينا الجملة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \& \quad \frac{dz}{dx} = \frac{xz}{y}$$

اكتب هذه الجملة بالشكل التناظري وأوجد تكاملها العام.

الحل

$$\frac{dx}{\underbrace{y}_{1}} = \frac{dy}{\underbrace{-x}_{2}} = \frac{dz}{\underbrace{xz}_{3}}$$

التكامل العام:

$$1 = 2 \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow x.dx + y.dy = 0$$

نكامل:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \ \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1 : c_1 = 2c$$

$$2 = 3 \Rightarrow \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{xz} \Rightarrow -dy = \frac{dz}{z}$$

$$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} -y = \ln z + \ln c_2 \Rightarrow e^{-y} = c_2.z$$

$$c_2 = \frac{e^{-y}}{z}$$

لو طلب منا الحل العام للجملة التفاضلية نعزل y, z أي:

$$x^2 + y^2 = c_1 \Longrightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{e^{-y}}{z} \Longrightarrow z = \frac{e^{-\sqrt{c_1 - x^2}}}{c_2}$$

$$(y, z) = \left(\sqrt{c_1 - x^2}, \frac{e^{-\sqrt{c_1 - x^2}}}{c_2}\right)$$

مثال 2: أوجد الحل التام للمعادلة التفاضلية التالية (بطريقة شارب):

$$z - pq = 0 \ldots (1)$$

الحل

نوجد الجملة المساعدة:

$$\underbrace{\frac{dx}{-q}}_{1}=\underbrace{\frac{dy}{-p}}_{2}=\underbrace{\frac{dz}{-2pq}}_{3}=\underbrace{-\frac{dp}{p}}_{4}=\underbrace{-\frac{dq}{q}}_{5}$$

$$4=5\Rightarrow-\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q}$$

$$\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}\Rightarrow\ln p=\ln q+\ln a\Rightarrow p=aq$$

نعوض في (1) :

$$z-pq=0\Rightarrow z-aq^2=0\Rightarrow q=\sqrt{\frac{z}{a}}$$

نعوض في $((p=aq))$:

$$p=aq=a\sqrt{\frac{z}{a}}=\sqrt{a.z}\Rightarrow p=\sqrt{a.z}$$

نعوض q , p بالمعادلة التفاضلية الكلية:

$$dz=pdx+qdy\Rightarrow dz=\sqrt{az}\,dx+\sqrt{\frac{z}{a}}dy$$

$$\Rightarrow dz=\sqrt{a}\sqrt{z}\,dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{z}\,dy$$

$$dz=\sqrt{z}\left(\sqrt{a}dx+\frac{1}{\sqrt{a}}dy\right)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=\left(\sqrt{a}dx+\frac{1}{\sqrt{a}}dy\right)\xRightarrow{\text{نكامل}}2\sqrt{z}=\sqrt{a}x+\frac{y}{\sqrt{a}}+b$$

$$\xRightarrow{\text{بالتربيع}}\ z=\frac{1}{4}\left[\sqrt{a}x+\frac{y}{\sqrt{a}}+b\right]^2$$

وهو الحل التام للمعادلة (1) .

مثال3: أوجد الحل التام باستخدام طريقة شارب:

$$(p+q)(px+qy)=0$$

الحل

$$\boldsymbol{ei: p+q=0 \ldots (*)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{a}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{p+q}=-\frac{dp}{0}=-\frac{dq}{0}}$$

$$-\boldsymbol{dp}=0 \Rightarrow p=a \xRightarrow{\text{نعوض في}(*)} q=-p \Rightarrow q=-a$$

نعوض كل من $p\,,q$ في المعادلة التفاضلية الكلية:

$$dz=p.dx+q.dy=a.dx-a.dy$$

$$z=ax-ay+b \quad \Big(\big(\text{الحل التام الأول}\big)\Big)$$

$$or: px+qy=0 \ldots (**)$$

$$\underbrace{\frac{dx}{x}}_{1}=\underbrace{\frac{dy}{y}}_{2}=\underbrace{\frac{dz}{px+qy}}_{3}=-\underbrace{\frac{dp}{p}}_{4}=-\underbrace{\frac{dq}{q}}_{5}$$

$$1=4 \Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{dp}{p} \Rightarrow x=cp^{-1} \Rightarrow p=\frac{c}{x}$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في}(**)} \frac{c}{x}.x+qy=0 \Rightarrow q=-\frac{c}{y}$$

نعوض كل من $p\,,q$ في المعادلة التفاضلية الكلية:

$$dz=p.dx+q.dy=c.\frac{dx}{x}-c.\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow z=c.\ln x-c.\ln y+d \quad \Big(\big(\text{الحل التام الثاني}\big)\Big)$$

ومنه الحل التام للمعادلة التفاضلية الجزئية هي جداء الحلين السابقين:

$$z=(ax-ay+b)(c.\ln x-c.\ln y+d)$$

مثال4: أوجد حل المعادلة التالية باستخدام طريقة شارب:

$$(z+qy)^2-p=0\ \ldots(*)$$

الحل

$$\underbrace{\frac{dx}{-1}}_{1}=\underbrace{\frac{dy}{2y(z+qy)}}_{2}=\underbrace{\frac{dz}{-p+2yq(z+qy)}}_{3}$$

$$=-\underbrace{\frac{dp}{(2p(z+qy))}}_{4}=-\underbrace{\frac{dq}{2q(z+qy)+2q(z+qy)}}_{5}$$

$$2=4\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dp}{p}\ \Rightarrow p=ay^{-1}\Rightarrow p=\frac{a}{y}$$

نعوض في المعادلة $(*)$ لنحصل على q:

$$(z-qy)^2=p\ \Rightarrow z+qy=\sqrt{p}\ \Rightarrow z+qy=\sqrt{\frac{a}{y}}\ \Rightarrow q=\frac{\sqrt{\frac{a}{y}}-z}{y}$$

نعوض كل من p,q في المعادلة الكلية:

$$dz=p.dx+q.dy=\frac{a}{y}.dx+\frac{\sqrt{\frac{a}{y}}-z}{y}.dy$$

$$y.dz=a.dx+\sqrt{\frac{a}{y}}\ .dy-z.dy$$

$$y.dz+z.dy=a.dx+\sqrt{a}.\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$d(y.z)=ax+2\sqrt{a}\sqrt{y}+b$$

$$y.z=ax+2\sqrt{a}\sqrt{y}+b$$

$$z=\frac{ax}{y}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{y}}+\frac{b}{y}$$

و هو الحل التام المطلوب...☺

◄**تنويه:** الأمثلة 2 و 3 و 4 أدرجتهم الدكتورة في ملحق التمارين

◄**المحاضرة: السابعة عشر** **عنوان المحاضرة: حل تمارين**

مثال: أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين :

$$\begin{cases}(z-y)^2.\dfrac{dy}{dx}=z\;\ldots\ldots\ldots(1)\\[2mm](z-y)^2.\dfrac{dz}{dx}=y\;\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

الحل:

$$\text{من}(1)\Rightarrow\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}\;\&\&\;\text{من}(2)\Rightarrow\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dz}{y}\xRightarrow{\text{من }(1),(2)}$$

$$\underbrace{\frac{dx}{(z-y)^2}}_{\boxed{1}}=\underbrace{\frac{dy}{z}}_{\boxed{2}}=\underbrace{\frac{dz}{y}}_{\boxed{3}}$$

$$\text{من النسبتين }(2),(3)\Rightarrow ydy-zdz=0\Rightarrow \boldsymbol{y^2-z^2=c_1}$$

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy-dz}{z-y}\Rightarrow\frac{dx}{z-y}=d(y-z)=-d(z-y)\Rightarrow$$

$$dx+(z-y).d(z-y)=0\;\Rightarrow \boldsymbol{x+\frac{1}{2}(z-y)^2=c_2}$$

مثال: أوجد حل جملة المعادلتين بطريقة الحذف :

$$\frac{dy}{dx}=z\qquad,\qquad\frac{dz}{dx}=-y$$

الحل:

$$\text{من}(1) \Rightarrow y' = z \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} y=z' \xrightarrow{\text{من}(2)} y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \mp i \Rightarrow \mathbf{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x}$$: و هو الحل العام

ولكن من (1) لدينا $y' = z$ ومنه:

$$z = y' = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

ومنه الحل هو :

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{c_1 \cos x + c_2 \sin x}, \boldsymbol{-c_1 \sin x + c_2 \cos x})$$

مثال: أوجد حل جملة المعادلتين التفاضليتين الخطيتين التاليتين بطريقة الحذف:

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 2z \ (1) \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2y - z \ (2)$$

الحل:

$$\text{من}(1) \Rightarrow y' = 3y - 2z \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} y=3y'-2z' \xrightarrow{\text{بتعويض}(2)\text{و}(1)}$$

$$y''=3(3y-2z)-2(2y-z) \Rightarrow y'' = 5y - 4z \xrightarrow{z \text{ نتخلص من}}$$

$$\text{من}(1) \Rightarrow z = \frac{1}{2}(3y - y') \ \ldots\ldots\ldots (3)$$ نعزل z ونعوض في y''

$$y'' = 5y - 2(3y - y') \Rightarrow y'' = -y + 2y' \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$$

و هي معادلة تفاضلية عادية ومنه :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta\text{بالحل على}} \lambda = 1 \ \text{جذر مضاعف} \Rightarrow$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \xrightarrow{\text{نعوض في } z \text{ وذلك بعد اشتقاق } y} y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \xrightarrow{\text{نعوض في } 3}$$

$$z = \frac{1}{2}(3y - y') = \frac{1}{2}[3(c_1 e^x + c_2 x e^x) - (c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x)]$$

$$\Rightarrow z = \left(c_1 + c_2 x - \frac{c_2}{2}\right) e^x$$

مثال: أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{1}{z} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-1=-\dfrac{1}{z}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{y-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dy-dx=-\dfrac{dx}{z}\cdot\dfrac{1}{y-x}\\ dz=\dfrac{dx}{y-x}\cdot\dfrac{1}{z}\end{cases}$$

الحل:

$$\begin{matrix}\dfrac{dy-dx}{y-x}=-\dfrac{dx}{z(y-x)}\\ \dfrac{dz}{z}=\dfrac{dx}{z(y-x)}\end{matrix} \xRightarrow{\text{بالجمع}} \frac{dy-dx}{y-x}+\frac{dz}{z}=0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

$$ln(y-x)+ln\,z=ln\,c_1 \Rightarrow (y-x)z=c_1 \ldots\ldots\ldots(\#)$$

$$\Rightarrow z=\frac{c_1}{y-x} \xRightarrow{\text{نعوضها في الأولى}}$$

$$dy-dx=-\frac{(y-x)dx}{c_1} \Rightarrow \frac{dy-dx}{y-x}=-\frac{dx}{c_1} \Rightarrow ln(y-x)=-\frac{x}{c_1}+c_2$$

$$\rightarrow (y-x)=c_2e^{-\frac{x}{c_1}} \Rightarrow (y-x)e^{\frac{x}{c_1}}=c_2$$

$$\xRightarrow{\text{نبدل } c_1 \text{ من} (\#)} (y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}}=c_2 \xRightarrow{\text{الحلول}} z=\frac{c_1}{y-x} \quad \&\&y=c_2e^{-\frac{x}{c_1}}+x$$

مثال : أوجد التكامل العام لجملة المعادلتين التاليتين:

$$2dy=dz\ (1) \qquad \&\& \qquad \frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=dy\ (2)$$

الحل:

$$\underbrace{\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}}_{\boxed{1}}=\underbrace{\frac{dy}{1}}_{\boxed{2}}=\underbrace{\frac{dz}{2}}_{\boxed{3}}$$

من (3)و(2) $\Rightarrow 2dy=dz \Rightarrow 2y-z=c_1 \Rightarrow z=2y-c_1$

$$z-x-y=2y-c_1-x-y=y-x-c_1$$

$$(2)-(1)=(3) \Rightarrow \frac{dy-dx}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dz}{2} \underset{z=2y-c_1 \text{ نعوض}}{\underbrace{\Rightarrow}} \frac{d(y-x)}{\sqrt{y-x-c_1}}=-\frac{dz}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y-x-c_1}=-\frac{1}{2}z+c_2 \Rightarrow \boldsymbol{c_2=2\sqrt{y-x-c_1}+\frac{1}{2}z}$$

"تنويه" لقد تم حل وادراج جميع الوظائف التي اعطتهم الدكتورة ضمن المحاضرات تحت عنوان (مثال\تمرين) ولقد قامت الدكتورة بحذف معادلات بيسل "المحاضرة ٨"

انتهت المحاضرة

انتهى المقرر... نرجو أن نكون قد وفقنا في تقديم المحتوى العلمي لهذا المقرر بجودة عالية و بشرح كافٍ ☺ و ندعو لكل زملائنا بالتوفيق و النجاح و نتمنى لكم امتحاناً موفقاً و مثمراً ☺ نعتذر عن ورود اخطاء ... "جل من لا يخطئ"

إعداد: بسمة نص الله*علا الدالاتي*رهف النقشي*دعاء الرحيل

تنسيق: ولاء الأخضر♥