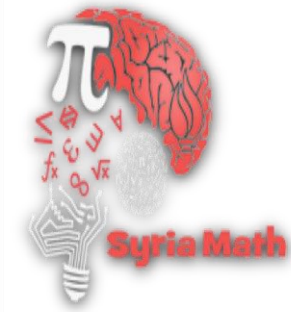


◄ دكتور المادة: جبران جبران

◄المحاضرة : السادسة عنوان المحاضرة : نظريات في البيان

بسم الله وبالله المستعان ...سنكمل معاً زملائي في هذه المحاضرة البيان في اثبات بعض النظريات وحل بعض التمارين

نتيجة : ليكن G بيان من المرتبة P عندئذٍ القضايا التالية متكافئة :

(1) G شجرة
(2) G بيان مترابط وحجمه $q = P - 1$
(3) G له حجم $P - 1$ ولا تحتوي على حلقات .

البرهان

$((1 \to 2))$ G شجرة إذا وفقط إذا كان G مترابط ولا يحتوي على حلقات ((حسب نظرية سابقة))
وبالتالي G شجرة من المرتبة P ومنه حجمها $q = P - 1$

$((2 \to 3))$ من الفرض لدينا G مترابط وحجمه $P - 1$ " محقق "
((علينا إثبات أن G لا يحتوي على حلقات)) فنفرض جدلاً أن G يحتوي على حلقة واحدة على الأقل
ولتكن C وبالتالي :

$$\forall\, v \in C \Longrightarrow deg\, v \geq 2$$

نقوم بتطبيق الخوارزمية التالية
نقوم بحذف كل رأس v درجته $deg\, v = 1$ وبالنهاية سنحصل على بيان G' من المرتبة P' وحجمه q'
بعملية الحذف نقوم بحذف "رأس مع ضلع "وبالنهاية سنحصل على البيان G' من المرتبة P' و الحجم q'

$$q = P - 1 \Longrightarrow q' = P' - 1$$

$\forall\, v \in V(G') \Longrightarrow deg\, v \geq 2$ ((لأننا حذفنا جميع الرؤوس التي درجتها (1)))

وبالتالي :

$$\sum_{v \in V(G')} \deg v = 2q' = 2P' - 2 \dots\dots (1)$$

وايضاً من جهة أخرى لدينا $deg\, v \geq 2$ وبما أن البيان من المرتبة P' فنجد :

$$\sum_{v \in V(G')} \deg v \geq 2P' \dots\dots (2)$$

Syria Math Team

وبالتالي من (1) و (2) نجد $2P' - 2 \not\geq 2P'$ وبالتالي هذا تناقض " إذاً G لايحتوي على حلقات "

((3 → 1)) الفرض : G له حجم $q = P - 1$ ولا يحوي على حلقات .

الطلب : G شجرة أي علينا إثبات أنها مترابطة ولا تحوي حلقات
((لكن لا يحوي حلقات محققة من الفرض ويبقى علينا إثبات أن G مترابط))

الإثبات

ولنفرض جدلاً أن G غير مترابط ، عندئذٍ يتألف G من عدة مركبات (كل مركبة مترابطة)

$$G_1, G_2, \dots \dots G_k \quad ; k \geq 2$$

ليكن لدينا G_i بحيث $1 \leq i \leq k$ بيان مترابط ولا يحوي على حلقات ومنه $G_i \; ; i = 1, \dots k$ شجرة
((G_i لا يحوي على حلقات لأن G لا يحوي على حلقات وأي جزء منه لا يحوي على حلقات))

بفرض أن مرتبتها P_i وحجمها q_i عندئذٍ $q_i = P_i - 1$ حيث $i = 1,2, \dots \dots, k$
بأخذ المجموع للطرفين نجد :

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = \sum_{i=1}^{k} (P_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} P_i - \sum_{i=1}^{k} 1$$

بحيث $\sum_{i=1}^{k} 1$ مكررة k مرة .

$$\Longrightarrow q = P - k \neq P - 1 \quad ; \; k \geq 2$$

وهذا تناقض للفرض ومنه " G مترابط ولا يحوي على حلقات وبالتالي G شجرة " .

نظرية (2) : كل شجرة غير تافهة تحوي على الأقل رأسين طرفيين " درجته (1) "

الإثبات

لتكن T شجرة غير تافهة ، ولتكن $d_1, d_2 \dots \dots, d_P$ درجات رؤوسها بحيث

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \dots \leq d_P$$

ونفرض جدلاً أن الأمر غير صحيح (أي يوجد على الأكثر رأس واحد طرفي " درجته (1)")
وبالتالي يكون لدينا $d_2 \geq 2 \quad \wedge \quad d_1 \geq 1$
لا يمكن للدرجات أن تساوي الصفر لأن البيان G مترابط .

$$\sum_{v \in V} \deg v \geq 1 + \sum_{v \neq v_1} \deg v_1 \geq 1 + 2(P - 1) = 2P - 1 \dots \dots (1)$$

إن $\sum_{v \neq v_1} \deg v_1$ تعني ((باقي درجات الرؤوس التي درجاتهن أكبر أو تساوي (2) ما عدا d_1))

ونعلم ان : $\sum_{v \in V} \deg v = 2q \dots \dots (2)$

Syria Math Team

من (1) و (2) نجد

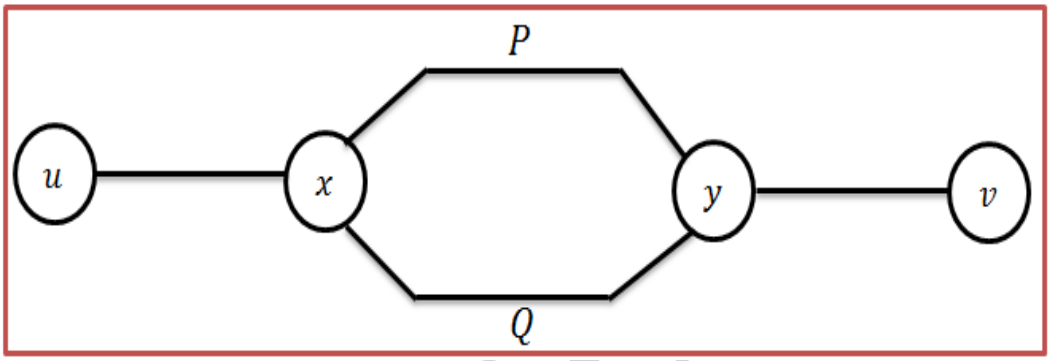
$$2q = 2(P-1) = 2q - 2 \not\geq 2P - 1$$

وهذا تناقض " إذاً الفرض الجدلي خاطئ " وبالتالي يوجد على الأقل رأسين طرفيين في كل شجرة .

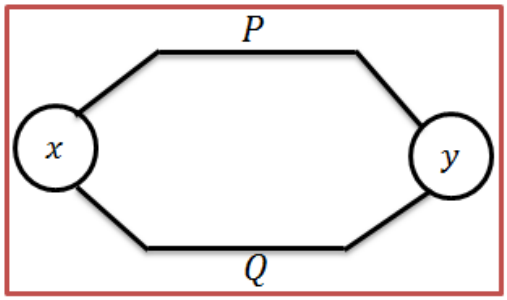
نظرية (3) : إذا كان u, v رأسين مختلفين من شجرة T عندئذٍ T تحوي على مسار $u - v$ وحيد

الإثبات

ليكن $u, v \in V$ رأسين مختلفين ، ولنفرض جدلاً أنه يوجد مسارين على الأقل $u - v$ وليكن الأول P والثاني Q نبحث عن الرأس x بحيث من الرأس u إلى الرأس x يبقى المسارين P, Q منطبقين .



ومنه نحصل على الحلقة التالية



وهذا تناقض " لأن T شجرة ولا تحوي على حلقات ومنه T شجرة تحوي على مسار وحيد " .

نظرية (4) : لتكن T شجرة من المرتبة m وليكن G بيان بحيث $\delta(G) \geq m - 1$

حيث ($\delta(G)$ أصغر درجة من المتتالية الدرجية) عندئذٍ T إيزمورفيزم مع البيان الجزئي من G .

((إيزمورفيزم تعني يوجد تقابل بين رؤوس الشجرة مع رؤوس البيان الجزئي من G))

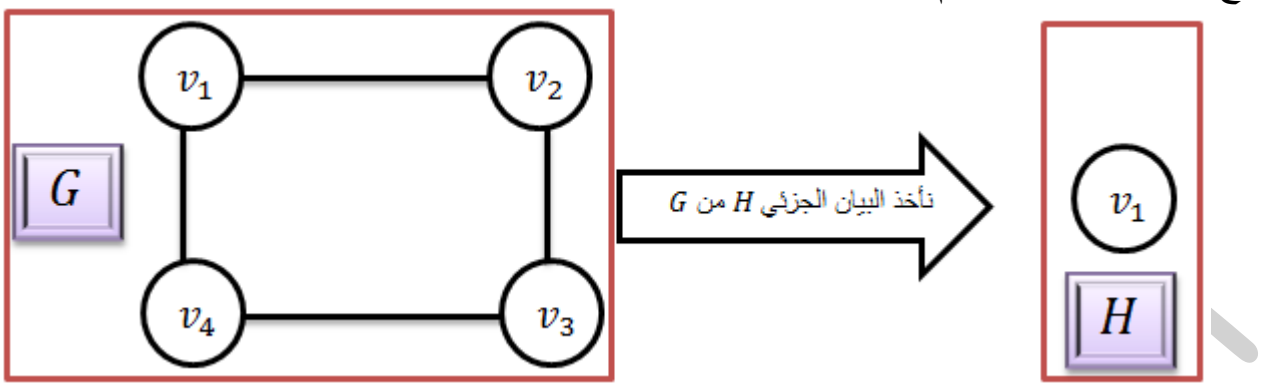
البرهان

لنبرهن ذلك باستخدام الاستقراء الرياضي على m

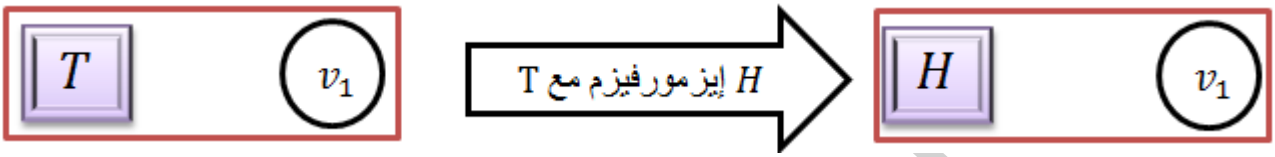
1) لنفرض أن $T = k_1$ بيان مؤلف من راس واحد " شجرة تافهة "

مرتبتها $m = 1$ وحجمها $q = 0$ ومرتبتها $P = 1$ وبالتالي $\delta(G) \geq 0$

توضيح ذلك من خلال الرسم

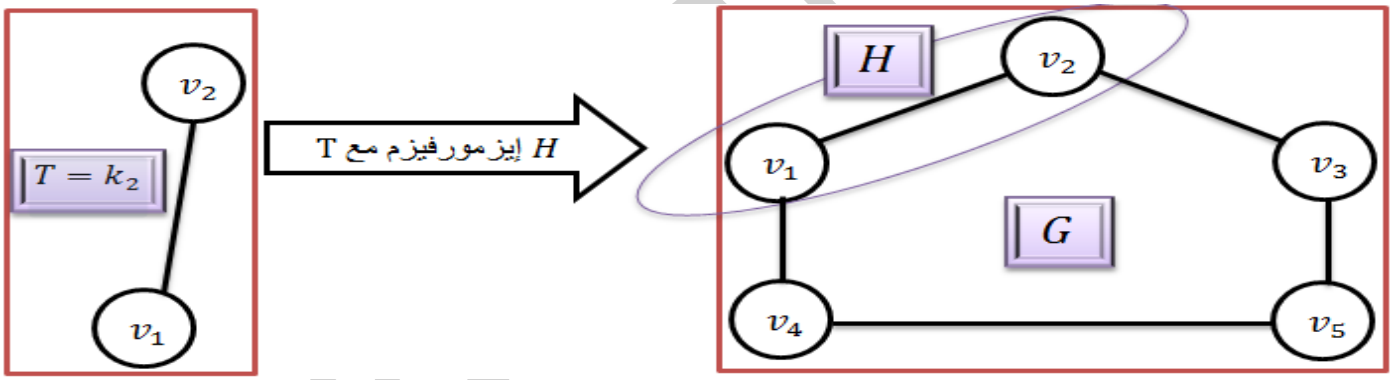


وبالتالي :



ومنه يوجد تقابل بين الشجرة $T = k_1$ والبيان الجزئي $H = v_1$ من البيان G

2) $T = k_1$ ومنه $m = 2$ إن T إيزومورفيزم مع البيان الجزئي من G يمتلك اضلاع أي $\delta(G) \geq 1$

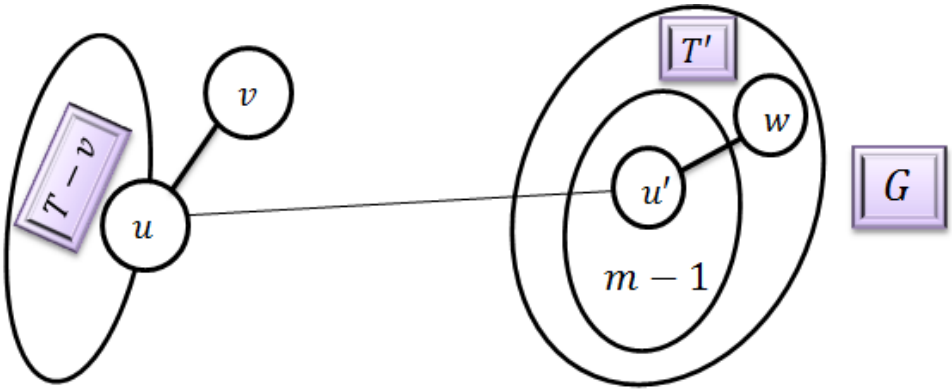


يوجد تقابل بين البيان $T = k_2$ والبيان الجزئي $H = v_1v_2$ من البيان G

إذا فهي محققة من أجل $m = 2$, $m = 1$

3) نفرض أن القضية صحيحة من أجل كل شجرة من المرتبة $(m-1)$ و $m \geq 3$ اي أن T هي إيزومورفيزم مع البيان الجزئي H من G الذي يحقق $\delta(G) \geq m-2$ ولتكن T شجرة من المرتبة m ، ولنثبت أن T إيزومورفيزم مع البيان الجزئي H من G الذي يحقق $\delta(G) \geq m-1$ وبما أن T شجرة عندئذٍ $v \in V(T)$ بحيث $\deg v = 1$ حسب نظرية سابقة تقول ((كل شجرة غير تافهة تحوي على الأقل رأسين طرفين))

نحذف الرأس v من T فنحصل على شجرة $T - v$ من المرتبة $m-1$ ومنه
حسب الفرض الاستقرائي فإن $T - v$ إيزومورفيزم مع البيان الجزئي T' من البيان G الذي يحقق
$\delta(G) \geq m-1 \geq m-2$



بفرض أن u' يتصل بـ u في T ، وبما أن $\deg u' \geq m-1$ في G

T' يملك $m-2$ رأس ومنه يوجد u' يتصل بضلع خارج T'
ومنه يوجد رأس w من G وليس رأس من T' بحيث w يتصل بـ u'
عندئذٍ T ايزمورفيزم مع $T'+u'w$

" شرح " حسب تعريف الإيزمورفيزم يوجد تقابل بين البيان $T-v$ من المرتبة $m-1$ مع البيان الجزئي T' من البيان G بنفس المرتبة $m-1$ ، وإن العقدة u تصل بـ v عقدة خارج $T-v$ ، وإن العقدة u' تصل بـ w عقدة خارج T' وبالتالي يوجد تقابل بين الضلع uv من T مع الضلع $u'w$ إذاً البيان T إيزمورفيزم مع $T'+u'w'$.

تمرين

إذا كان G بياناً بسيطاً مرتبته P بحيث $\deg v \geq \frac{(P-1)}{2}$ فإن G مترابط .

الحل

نفرض جدلاً أن G غير مترابط عندئذٍ له عدة مركبات $k \geq 2$; $G_1, G_2, \dots\dots, G_k$
نختار $\widetilde{G_1} = G_1$ بحيث $\widetilde{G_2} = G_2 + G_3 + G_4 \dots\dots G_k$
و P_1 مرتبة $\widetilde{G_1}$ و P_2 مرتبة $\widetilde{G_2}$ ومنه $P_1 + P_2 = P$

$$\forall v \in V(\widetilde{G_1}) \quad , \quad deg\, v \leq P_1 - 1$$

$$\forall v \in V(\widetilde{G_2}) \quad , \quad deg\, v \leq P_2 - 1$$

ولدينا من الفرض $\frac{(P-1)}{2} \leq \deg v \leq P_1 - 1 \quad \dots\dots (1)$

$$\frac{(P-1)}{2} \leq \deg v \leq P_2 - 1 \dots\dots (2)$$

بجمع كلاً من (1) و (2) فنجد :

$$\Rightarrow P - 1 \leq P_1 + P_2 - 2 \Rightarrow P - 1 \leq P - 2$$

Syria Math Team

وهذا تناقض " إذاً G بياناً مترابطاً

تمرين

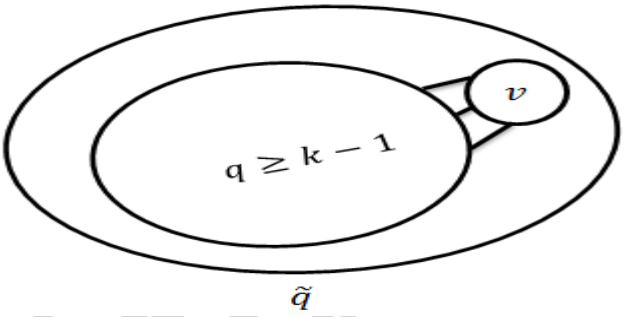
إذا كان G بيان مترابط من المرتبة P عندئذٍ $q \geq P-1$

الإثبات

بالاستقراء الرياضي على P مرتبة البيان ، إذا كان $G = k_2$

نفرض صحة القضية من أجل $P = k$ ولنثبت صحتها من أجل $P = k+1$ وبفرض أن G بيان مترابط من المرتبة $P = k+1$ ، ولنأخذ الرأس v من $V(G)$ نحذف الرأس v فنحصل على البيان $G - v$ مرتبته $P = k$ ومنه حسب الفرض الاستقرائي $q \geq k-1$ (أضلاع $G - v$)
وإن $\deg v \geq 1$ ، وبإعادة الرأس v للبيان G يصبح حجم G

$$\tilde{q} \geq k-1 \Longrightarrow \tilde{q} \geq q+1 \geq k$$



تمارين وظيفة

1) أثبت صحة القضية التالية $y_{n+4} = 2y_{n+2} + y_n$

علماً أن $\forall n \geq 3$, $y_n \geq n+3$ والقيم الابتدائية $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 6$
وحل القضية السابقة صحيحة من أجل القيم الابتدائية $y_0 = 2$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$

2) G بيان بسيط من المرتبة P ثنائي التجزئة عندئذٍ $q \leq \frac{P^2}{4}$

3) G بيان بسيط إذا كان G غير مترابط أثبت أن $\bar{G}$ مترابط

انتهت المحاضرة

إعداد : فطوم مرعي ** محمد علي فليو