نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: الثالثة عشر عنوان المحاضرة : تطبيقات الحساب التفاضلي

تعرفنا في المحاضرة السابقة على منشور تايلور لمتغير واحد و عممنا النظرية في R^n وسنتناول في هذه المحاضرة :

١ـ تمارين لمنشور تايلور

٢ـ نظرية لمعرفة النقطة الحرجة فيما إذا كانت قصوى أم لا

مثال :

لتكن لدينا الدالة :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=e^x\sin x$$

أثبت أن منشور تايلور لهذه الدالة في جوار (0) هو :

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

تذكرة : $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots\ldots$

الحل:

إن $f(0)=0$

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

ملاحظة : إذا كان لدينا عبارة من الشكل $(a\ \sin x+b\cos x\ )$ فإن :

$$\sqrt{a^2+b^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

بالعودة للتمرين : نضرب ونقسم على $\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2}e^{x}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{cos(\frac{\pi}{4})}\sin x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{sin(\frac{\pi}{4})}\cos x\right)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \sqrt{2}e^{x}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \sqrt{2}e^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

بأسلوب مماثل

$$f''(x) = \sqrt{2}e^{x}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نضرب ونقسم على $\sqrt{2}$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{2}e^{x}\sin(x+\frac{2\pi}{4})$$

$$f''(x) = \sqrt{2}e^{x}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2}e^{x}\sin(x+\frac{2\pi}{4})$$

$$\Rightarrow f''(0) = \left(\sqrt{2}\right)^{2}\sin\frac{2\pi}{4}$$

ومنه :

$$f^{n}(0) = \left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

الأن نعوض

$$e^{x}\sin x = 0 + \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{1!}x + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2}\sin\frac{2\pi}{4}}{2!}x^{2} + \ldots\ldots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n}$$

هل المتسلسلة متقاربة ؟؟

نطبق (دالمبير)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n} \sin\frac{n\pi}{4} x^{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2}\,x}{n+1}\,\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}|x| < \lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}} = \infty$$

$|x| < \infty$ و نصف قطر التقارب هو $]-\infty, +\infty[$ إذا $\forall x \in \mathbb{R}$ فإن المتسلسلة متقاربة

تمرين:

انشر حسب قوى x, y (أي بجوار $(0,0)$) الدالة:

$$f(x,y) = ln(1 - x + xy - y)$$

الحل:

يمكن كتابة $f(x,y)$ بالشكل:

$$f(x,y) = ln(1 - x - y + xy) = ln\big((1-x)(1-y)\big) = ln(1-x) + ln(1-y)$$

مجموعة تعريف ما ضمن اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر أي $(1-x)(1-y) > 0$ فإما :

$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 1 - y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 > x \\ 1 > y \end{cases} \Rightarrow 2 > y^2 + x^2$$

و (في الجملة الأولى) أي داخل دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

أو :

$$\begin{cases} 1 - x < 0 \\ 1 - y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \\ 1 < y \end{cases} \Rightarrow 2 < y^2 + x^2$$

و لكن في هذه الحالة النقطة $(0,0)$ لا تنتمي ، لذا سنأخذ المجموعة الأولى :

$$f(x,y) = ln(1-x) + ln(1-y) \Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow f_x(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y) = -\frac{(-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2} \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = f_{xxx}(x,y) = -\frac{(-2(1-x)-1)}{(1-x)^4} \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = -2 = -2!$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = -\frac{2(3)}{(1-x)^4} \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = -2.3 = -3!$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0,0) = -(n-1)!$$

بنفس الطريقة بالنسبة ل y نجد:

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) = -\frac{(n-1)!}{(1-y)^n} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(0,0) = -(n-1)!$$

وجميع المشتقات الجزئية المختلطة تساوي الصفر لأنه عند الاشتقاق بالنسبة لـ x لن يبقى مقادير تحوي y فالاشتقاق لـ y عندئذٍ معدوم ، و كذلك لـ x

منشور تايلور :

$$f(a+h,b+u) - f(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b).$$

$$= \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \cdots\cdots$$

$$ln(1-h+hk-k) - 0 = \frac{-(h+k)}{1!} + \frac{1}{2!}(-h^2-k^2) +$$
$$\frac{1}{3!}\Big(-2h^3 + 3h^2k\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} + 3h\,k^2\underbrace{\frac{\partial\, f}{\partial x}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{=0} - 2k^3\Big)$$

$$-(h+k) + \frac{1}{2!}(-h^2-k^2) + \frac{2!}{3!}(h^3+k^3) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{h^n+k^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{ln(1-x-y+xy) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{x^n+y^n}{n}\right)}$$

ومنه المشتق المختلط من جميع المراتب معدوم .

القيم القصوى نسبياً:

لتكن $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f: D \subseteq$ ولتكن $c \in D$ عندئذ:

١) نقول عن f إنها تبلغ **قيمة صغرى نسبية** في الموضع c إذا وجد جوار V لـ c محتوى في D بحيث يحقق: $\forall x \in V: \quad f(c) \le f(x)$

٢) نقول عن f إنها تبلغ **قيمة عظمى نسبية** في الموضع c إذا وجد جوار V لـ c محتوى في D بحيث يحقق: $\forall x \in V \ : \ f(c) \geq f(x)$

ملاحظة: إذا كانت f تبلغ قيمة (عظمى أو صغرى) نسبياً في موضع ما فإننا نقول بأن ال f قيمة قصوى نسبية

يأتي في الامتحان سؤال يطلب فيه بعض التعاريف

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $c \in D$ عندئذ:

٣) نقول عن f إنها تبلغ **قيمة عظمى** في الموضع c إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in D \ : \ f(c) \geq f(x)$$

٤) نقول عن f إنها تبلغ **قيمة صغرى** في الموضع c إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in D \ : \ f(c) \leq f(x)$$

مبرهنة(دون برهان):

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $c \in D$ و f تبلغ في c قيمة قصوى نسبية (عظمى أو صغرى) والمشتقات الجزئية الأولى موجودة في c عندئذٍ يكون:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \quad , \ \forall i = 1,2,\dots,n$$

لكن الشرط : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \quad , \quad \forall i = 1,2,\dots,n$

غير كافٍ لكي تكون c قيمة قصوى نسبية لـ f.

(أي إذا كانت المشتقات تحقق $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ فليس بالضرورة أن تكون عندها نقطة قصوى نسبية)

النقطة الحرجة:

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $c \in D$ نقول عن c أنها نقطة حرجة للدالة f إذا تحقق:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0 \quad , \ i = 1,2,\dots,n$$

من المبرهنة السابقة نستنتج:

c قصوى للدالة $f \Leftarrow c$ حرجة

c حرجة $\not\Rightarrow$ c قصوى لـ f

مثال:

لتكن

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x.y$$

أوجد النقاط الحرجة للدالة f ثم ادرس فيما إذا كانت هذه النقاط هي قصوى نسبية للدالة f.

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = y \Longrightarrow f_x(x,y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ f_y(x,y) = x \Longrightarrow f_y(x,y) = 0 \Longrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow \text{نقطة حرجة } (0,0)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x > 0\ \ ,y > 0\ ; f(x,y) = x.y > 0 = f(0,0)$$

و لكن من جهة أخرى :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ ,x < 0\ \ ,y > 0\ ; x.y = f(x,y) < 0 = f(0,0)$$

وبالتالي $(0,0)$ ليست قصوى نسبية لأنها في جوار الصفر مرةً كانت صغرى نسبية و مرة كانت عظمى نسبية، والشرط لكي تكون النقطة الحرجة هي قصوى نسبية هي أن تكون إما صغرى نسبية أو عظمى نسبية .

طريقة ثانية: (باستخدام مفهوم الجوارات)

١) لنأخذ $N\big((0,0),\delta\big)$ جوار لـ $(0,0)$ (كرة مفتوحة) ولنأخذ $x = \frac{\delta}{2}\ \ ,y = \frac{\delta}{2}$

$$\|(x,y)\| = \left\|\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) \in N((0,0),\delta)$$

$$f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0,0)$$

٢) لنأخذ $x = \frac{\delta}{2}\ \ ,y = -\frac{\delta}{2}$

$$\|(x,y)\| = \left\|\left(\frac{\delta}{2},-\frac{\delta}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\delta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$$

وبالتالي: $\left(\frac{\delta}{2},-\frac{\delta}{2}\right) \in N\big((0,0),\delta\big)$

$$f\left(\frac{\delta}{2},-\frac{\delta}{2}\right) = -\frac{\delta^2}{4} < 0 = f(0,0)$$

ومنه نستنتج أن (0,0) ليست قصوى نسبية.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب