نظري

◄ دكتور المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الرابعة عشر   عنوان المحاضرة: الفضاءات

سنتعرف في هذه المحاضرة على :

١- مبرهنة القيمة القصوى لمتغيرين ولثلاث متغيرات

٢- بعض الأمثلة والتمرين

مبرهنة القيمة القصوى النسبية للدالة في متغيرين :

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بحيث:

$c \epsilon D$ نقطة حرجة و المشتقات الجزئية التالية $f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} , f_{xx} , f_{yy}$ موجودة ومستمرة في C و $\Delta_1(C) = f_{xx}$

و لنعرف المحدد :

$$\Delta_2(C) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

نميز حالات :

١. $\Delta_1 > 0 , \ \Delta_2 > 0 \implies$ (c) صغرى نسبية.

٢. $\Delta_1 < 0 , \ \Delta_2 > 0 \implies (c)$ عظمى نسبية.

٣. $\Delta_2 < 0 \implies$ ليست قصوى.

٤. $\Delta_2 = 0$ حالة فشل نلجأ إلى تعريف الجوارات.

مبرهنة القيمة القصوى النسبية للدالة في ثلاث متغيرات :

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$c \epsilon D$ نقطة حرجة والمشتقات الجزئية التالية

$f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} , f_{xx} , f_{yy} , f_{xz} , f_{zx} , f_{yz}, f_{zy} , f_{zz}$ موجودة ومستمرة في C و $\Delta_1(C) = f_{xx}$

و لنعرف المحددين :

$$\Delta_2(C)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3(C)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

نميز أن:

١- $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3>0 \Leftarrow$ c صغرى نسبية.

٢- $\Delta_1=<0\ ,\ \Delta_2=>0\ \ ,\Delta_3=<0 \Leftarrow$ c عظمى نسبية .(لأنها متناوبة وشرط أن تكون أول Δ سالبة)

مثال:

لتكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

بحيث : $f(x,y)=x^4+y^4$

أوجد النقاط الحرجة وادرس فيما إذا كانت القيمة القصوى نسبة ؟

الحل : لنأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى

$$f_x(x,y)=4x^3=0 \implies x=0$$
$$f_y(x,y)=4y^3=0 \implies y=0$$

إذاً (0,0)نقطة حرجة.

$$f_{xx}(x,y)=12x^2=0 \implies f_{xx}(0,0)=0$$

$$f_{yy}(x,y)=12y^2=0 \implies f_{yy}(0,0)=\ 0$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

فشل المحدد **فنلجأ إلى التعريف :**

إن $f(x,y)=x^4+y^4>f(0,0)=0$ وذ لك $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$

(0,0) صغرى نسبية بل أكثر من ذلك .. هي صغرى مطلقة .

مثال:

لتكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$$

أوجد النقاط الحرجة للدالة f وبيّن فيما إذا كانت هذه النقاط هي نقاط قيم قصوى نسبية.

الحل:

$$f_x(x,y,z) = 2x - y + 1 = 0 \dots (1)$$
$$f_y(x,y,z) = 2y - x = 0 \Longrightarrow x = 2y \dots (2)$$
$$f_z(x,y,z) = 2z - 2 = 0 \Longrightarrow z = 1 \dots (3)$$

بالتالي (و بالحل المشترك) النقطة الحرجة الوحيدة هي: $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$f_{xx}(x,y,z) = 2 \quad > 0 \ , f_{xy}(x,y,z) = -1$$
$$f_{yy}(x,y,z) = 2 \ \ , f_{yx}(x,y,z) = -1$$
$$f_{zz}(x,y,z) = 2 \ \ , f_{zx}(x,y,z) = 0 = f_{xz}(x,y,z)$$
$$f_{yz}(x,y,z) = 0 = f_{zy}(x,y,z)$$

$$\Delta_1 = f_{xx} = 2 > 0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$\Longleftarrow \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ صغرى نسبية

مثال : (هام)

لتكن

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

١) أثبت أن $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f.

٢) برهن أن $(0,0)$ هي نقطة قيمة قصوى نسبية لمقصور f على أي مستقيم مار من $(0,0)$.

٣) أثبت أنه أياً كان الجوار $N\big((0,0),\delta\big)$ للنقطة $(0,0)$فهنالك نقاط يكون فيها $f(x,y) > 0$ ونقاط يكون فيها $f(x,y) < 0$

الحل:

◄**الطلب الأول:**

$$f_x(x,y) = -2x(y - 2x^2) - 4x(y - 2x^2)$$
$$= -2xy + 4x^3 - 4xy + 4x^3 = 8x^3 - 6xy$$
$$f_x(0,0) = 0$$
$$f_y(x,y) = (y - x^2) + (y - 2x^2) = 2y - 3x^2$$
$$f_y(0,0) = 0$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f.

◄**الطلب الثاني :**

لنفرض أن $y = \alpha x$ (مستقيماً ماراً من المبدأ)

$$f(x,\alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 2x^2) = \alpha^2 x^2 - 2\alpha x^3 - \alpha x^3 + 2x^4$$
$$= \alpha^2 x^2 - 3\alpha x^3 + 2x^4$$

$$f_x(x,\alpha x)=2\alpha^2x-9\alpha x^2+8x^3$$
$$f_{xx}(x,\alpha x)=2\alpha^2-18\alpha x+24x^2$$
$$f_{xx}(0,0)=2\alpha^2>0$$

ومنه $(0,0)$ هي صغرى نسبية بالنسبة لمقصور f على أي مستقيم $y=\alpha x$ مار من المبدأ.

◄الطلب الثالث:

لنأخذ النقطة $\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\in N\big((0,0),\delta\big)$

$$f\left(0,\frac{\delta}{2}\right)=\frac{\delta^2}{4}>0=f(0,0)$$

لنأخذ نقطة أخرى $\left(\frac{\delta}{\sqrt3},\frac{\delta^2}{2}\right)\in N\big((0,0),\delta\big)$

$$\frac{\delta^2}{3}+\frac{\delta^4}{4}=\delta^2\left(\frac13+\frac{\delta^2}{4}\right)<\delta^2$$

$$\Rightarrow\frac13+\frac{\delta^2}{4}<1\Rightarrow\frac{\delta^2}{4}<1-\frac13=\frac23\Rightarrow\delta^2<\frac83\Rightarrow\delta<\sqrt{\frac83}$$

ومنه $\exists N\left((0,0),\delta<\sqrt{\frac83}\right)$

$$f\left(\frac{\delta}{\sqrt3},\frac{\delta^2}{2}\right)<0=f(0,0)$$

ومنه $(0,0)$ ليست قصوى للدالة f.

ملاحظة: لقد اخترنا النقطة $\left(\frac{\delta}{\sqrt3},\frac{\delta^2}{2}\right)\in N\big((0,0),\delta\big)$ لأننا نبحث عن نقطة في جوار الصفر صورتها أصغر من الصفر حيث لو أخذنا النقطة $\left(\frac{\delta}{\sqrt2},\frac{\delta^2}{2}\right)$ لكانت صورتها أكبر من الصفر و هذا ليس ما نبحث عنه .

تمرين :

لتكن لدينا الدالتان الحقيقيتان $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=x^2-2xy+y^2+x^4+y^4$$
$$g(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4+y^4$$

١) أثبت أن $(0,0)$ نقطة حرجة لكل من f,g.

٢) أثبت أن $\Delta=0$ في النقطة $(0,0)$ لكل من f,g.

٣) برهن أن $(0,0)$ نقطة قصوى نسبية لـ f وليست قصوى نسبية لـ g.

الحل:

$$f_x(x,y)=2x-2y+4x^3\quad,\quad f_y(x,y)=-2x+2y+4y^3$$
$$g_x(x,y)=2x-2y-4x^3\quad,\quad g_y(x,y)=-2x+2y+4y^3$$
$$f_x(0,0)=0=f_y(0,0)\quad,\quad g_x(0,0)=0=g_y(0,0)$$

ومنه (0،0) نقطة حرجة لـ f, g. لنحسب المحدّد:

$$f_{xx}(x,y) = 2 + 12x^2 \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2 + 12y^2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2 \quad , \quad g_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2$$

$$g_{yy}(x,y) = 2 + 12y^2 \quad , \quad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = -2$$

$$\Delta_{(g)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +4 - 4 = 0 \text{ يفشل}$$

$$\Delta_{(f)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = +4 - 4 = 0 \text{ يفشل}$$

$$f(x,y) = \underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{مطابقة}} + x^4 + y^4$$

$$= (x-y)^2 + x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad f(x,y) \geq f(0,0)$$

ومنه $(0,0)$ صغرى نسبية بل أكثر من ذلك فهي مطلقة.

بالنسبة لـ g سنستخدم التعريف:

1) نأخذ النقطة $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \in N\big((0,0), \delta\big)$

$$g\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} - \frac{2\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^4}{16} - \frac{\delta^4}{16} = -\frac{\delta^2}{8} < 0 = g(0,0)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) < g(0,0)$$

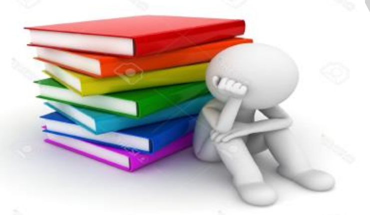
2) نأخذ النقطة $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \in N\big((0,0), \delta\big)$

$$g\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = \frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta^4}{16} = \frac{\delta^2}{4}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) > 0$$

نريد إثبات أنها ليست قصوى نسبية لذلك أخذنا صورة النقطة الثانية أكبر من الصفر (سنوجد أنه هنالك قيم لـ δ تجعلها موجبة)

ومنه بما أن $\frac{\delta^2}{4} > 0$ فلكي تكون $\frac{\delta^2}{4}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) > 0$ يجب أن يكون $1 - \frac{\delta^2}{4} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2}{4} < 1 \Rightarrow \delta^2 < 4 \Rightarrow \delta < 2$$



$$\Rightarrow \; g\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) > g(0,0) \; ; \; \delta > 2$$

وبالتالي $(0,0)$ ليست قصوى لـ g.

انتهت المحاضرة إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب