نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄المحاضرة: الحادية عشر ◄ العنوان: الاستمرار في الفضاءات المترية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- **ثلاث مبرهنات عن تكافؤ الاستمرار مع: النهاية ـ المجموعات المفتوحة ـ المجموعات المغلقة وأمثلة عن الاستمرار.**

مبرهنة: لتكن $f:(x,d)\to(y,\rho)$ تابع عندئذ f مستمرة في

$$* \dots\dots\dots\{x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x) \Leftrightarrow x\in X\}$$

البرهان :

$(\Leftarrow)$ ليكن $\boldsymbol{f}$ تابع مستمر في x ولنثبت العلاقة $(*)$ من أجل الجوار $f(x)$, V حيث $V=N(f(x),\varepsilon)$ من أجل $\varepsilon>0$ كيفي يوجد U جوار لـ x بحيث $f(U)\subseteq V$ وبالتالي توجد w مفتوحة في X بحيث :

$$x\in w\subseteq U \Rightarrow \exists\,\delta>0: N(x,\delta)\subseteq w\subseteq U$$

ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر X بحيث : $x_n\to x$ من أجل $\delta>0$ يوجد $n_0\in N^*$ بحيث :

$$n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x)<\delta$$

$$n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in N(x,\delta)\subseteq w\subseteq U$$

$$\Rightarrow f(x_n)\in f\big(N(x,\delta)\big)\subseteq f(w)\subseteq f(V)\subseteq V\Rightarrow f(x_n)\in V=N(f(x),\varepsilon)$$

$$n\geq n_0 \Rightarrow d(f(x_n),f(x))<\varepsilon$$

الخلاصة من أجل $\varepsilon>0$ وجدنا $n_0\in N^*$ بحيث :

$$n\geq n_0 \Rightarrow d\big(f(x_n),f(x)\big)<\varepsilon \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$$

وبالعكس$(\Rightarrow)$: لنفرض تحقق الشرط $(*)$ ونبرهن أن f مستمر لنفرض جدلا أن f غير مستمر في x

إذا يوجد جوار V, ل $f(x)$ بحيث مهما يكن الجوار U ل x فإن $f(U) \nsubseteq V$

لنختار U : $U_n = N\left(x, \frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, , 3 \ldots.$ مهما يكن $n \in N^*$ فإن $f(U_n) \nsubseteq V$

أي يوجد عنصر في $f(U_n)$ غير موجود في V ومن أجل كل $n \in N^*$ يوجد عنصر $f(x_n)$ حيث $x_n \in U_n$ بحيث $f(x_n) \notin V$

$x_n \in U_n \Rightarrow x_n \in N\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 0 < d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ وبجعل $n \to \infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Rightarrow x_n \to x$$

ولدينا متتالية $\{x_n\}$ حيث $x_n \to x$ وبالاعتماد على الشرط $(*)$ نجد أن $f(x_n) \to f(x)$

لكن $f(x) \in V$ إذا توجد w مفتوحة بحيث $f(x) \in w \subseteq V$ ومنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $N(f(x), \varepsilon) \subseteq w \subseteq V$ ولدينا $f(x_n) \to f(x)$

$$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0;\ \exists n_0 \in N^* : n \geq n_0 \Rightarrow d\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x_n) \in N(f(x), \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow f(x_n) \in V$$

و هذا يناقض كون $f(x_n) \notin V$ ومنه فإن f مستمرة في $x \in X$

مبرهنة: ليكن $f : (X, d) \to (y, \rho)$ تابع مستمر على $X \Leftrightarrow$ إثبات أن الصورة العكسية لكل مفتوحة في Y هي مفتوحة في X

البرهان :

$(\Leftarrow)$ ليكن f تابع مستمر على X ونريد إثبات أن الصورة العكسية لكل مفتوحة في Y هي مفتوحة في X ، لتكن V مفتوحة في Y ولنأخذ

$$x_0 \in f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \quad , \quad x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x_0) \in V$$

و V جوار مفتوح ل $f(x_0)$ لكن f مستمر في $x_0 \in X$ إذا يوجد جوار U ل x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$ توجد w مفتوحة حيث :

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : N(x_0, \delta) \subseteq w \subseteq U$$

$$\Rightarrow f\big(N(x_0, \delta)\big) \subseteq f(U) \subseteq V \quad \Rightarrow f\big(N(x_0, \delta)\big) \subseteq V \ \Rightarrow N(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

إذا $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X

$(\Rightarrow)$ **وبالعكس :** لنثبت أن f مستمر

لتكن $x_0 \in X$ و V جوار ل $f(x_0)$ نريد إيجاد U جوار ل x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$ توجد w مفتوحة في Y بحيث $f(x_0) \in w \subseteq V$

من الفرض في نص المبرهنة نجد أن $f^{-1}(w)$ مفتوحة في X لكن :

$$f(x_0) \in w \Longrightarrow x_0 \in f^{-1}(w) \Rightarrow \exists\, r > 0 : \; N(x_0,r) \subseteq f^{-1}(w)$$

وليكن $U = N(x_0,r)$ ومنه :

$$f(U) = f\big(N(x_0,r)\big) \subseteq f\big(f^{-1}(w)\big) \subseteq w \subseteq V \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

ومنه f مستمر في $x_0 \Longleftarrow f$ مستمر في كل X

تذكرة : $U \subseteq X \,; f^{-1} = \{x \in X : F(x) \in V\}$

$$f^{-1}(A^C) = \left(f^{-1}(A)\right)^C$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f_1(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

مبرهنة : ليكن $f(X,d) \to (Y,\rho)$ تابع مستمر على $X \Longleftrightarrow$ الصورة العكسية لكل مغلقة في Y مغلقة في X

$((\Longleftarrow))$ لتكن E مغلقة في $Y \Longleftarrow E^C$ مفتوحة في Y

$\Longleftarrow f^{-1}(E^C) = \left(f^{-1}(E)\right)^C$ مفتوحة في X (حسب المبرهنة السابقة) إذا $(f^{-1}(E)^c$ نعوض في X ومنه $f^{-1}(E)$ مغلقة في X

$((\Longrightarrow))$ **لإثبات أن f مستمر :** نفرض V مجموعة مفتوحة في Y إذا V^C مغلقة في Y ومنه $\left(f^{-1}(V)\right)^C$ مغلقة في X ومنه $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X إذا f مستمر على X استنادا على مبرهنة سابقة .

((نوه الدكتور أنه يمكننا الكتابة في الامتحان بهذا الشكل دون ذكر المبرهنة السابقة))

- **حل بعض تمارين المحاضرة السابقة :**

1) $A \subseteq B \Longrightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

ليكن $x, y \in A \quad \Longrightarrow \quad x, y \in B$

$$\Longrightarrow d(x,y) \leq \delta(B) \Longrightarrow \sup d(x,y) \leq \delta(B) \Longrightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$$

2) $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$

لتكن $b \in B \quad , \quad a \in A \quad , \quad x, y \in A \cup B$ **سنميز عدة حالات :**

١. $y \in B \quad , \quad x \in A$

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$$

$$\delta(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

٢. $y \in A \quad , \quad x \in B$

$$d(x,y) \leq d(y,a) + d(a,b) + d(b,x)$$

$$\delta(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

٣. $x, y \in A \quad \Longrightarrow \quad d(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$

٤. $x, y \in B \quad \Longrightarrow \quad d(x,y) \leq \delta(B) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$

إذا $\forall x, y \in A \cup B$ فإن :

$$d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B) \Longrightarrow \sup d(x,y) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

$$\Longrightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(a,b) + \delta(B)$$

وهذه المتراجحة صحيحة مهما يكن $b \in B \quad , \quad a \in A$

$$\Longrightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \inf d(a,b) + \delta(B)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو - هديل سعيد - هالة مصطفى