نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: الحادية عشرة عنوان المحاضرة: القاعدة التجريبية (قاعدة ال3σ)

بسم الله الرحمن الرحيم

مبرهنة القاعدة التجريبية

يكون في مجتمع طبيعي متوسطه (μ) وتباينه (σ^2) $(\sigma$ الانحراف المعياري$)$
١- 68.26% من القياسات تقع ضمن المجال $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$.
٢- 95.44% من القياسات تقع ضمن المجال $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$.
٣- 99.74% من القياسات تقع ضمن المجال $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$.

برهان (١):

بفرض أن $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن :

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\underset{\text{بالمعايرة}}{=}P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}<\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Z\sim N(0,1)}<\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=P(-1<Z<1)$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=\phi_Z(1)-\phi_Z(-1)$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=2\phi_Z(1)-1$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=2(0.8413)-1$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=1.6826-1=0.6826$$

$$\Rightarrow P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=68.26\%$$

مثال :

إذا كان $X\sim N\left(\underbrace{170}_{\mu},\underbrace{100}_{\sigma^2}\right)$ يدل على طول طالب جامعة ما وأخذنا عينة مؤلفة من (100) طالب من هذا المجتمع (الطلاب) فإنه سيكون هناك (68) طالب طوله ما بين $\left(\underbrace{160cm}_{\mu-\sigma}\right)$ و $\left(\underbrace{180cm}_{\mu+\sigma}\right)$

،وسيكون هناك (95) طالب طولهم ما بين $\left(\underbrace{150cm}_{\mu-2\sigma}\right)$ و $\left(\underbrace{190cm}_{\mu+2\sigma}\right)$ ،وسيكون هناك (99) طالب أطوالهم ما بين $\left(\underbrace{140cm}_{\mu-3\sigma}\right)$ و $\left(\underbrace{200cm}_{\mu+3\sigma}\right)$.

تطبيق هذه المبرهنة

تستخدم لمعرفة فيما إذا كان المجتمع المدروس يتوزع وفقا للتوزيع الطبيعي أم لا وذلك بتحديد نسبة قياسات العينة الواقعة في المجالات $[\bar{x}-5, \bar{x}+5]$ وَ $[\bar{x}-25, \bar{x}+25]$ وَ $[\bar{x}-35, \bar{x}+35]$

حيث : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ متوسط العينة

و : $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} . \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ الانحراف المعياري للعينة .

و**تقارن** النسب مع النسب المعطاة في المبرهنة فإذا كانت قريبة منها بشكل مقبول قبلنا أن للمجتمع التوزيع الطبيعي .

مبرهنات النهاية الحدية والتوزيع الطبيعي

مبرهنة متراجحة ماركوث

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا يأخذ قيما غير سالبة عندئذ من أجل $(\varepsilon > 0)$ فإن :

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

مبرهنة متراجحة تشيبتشيف

إذا (X) متغيرا عشوائيا متوسطه (μ) وتباينه (σ^2) محدودان فإنه من أجل كل $(\varepsilon > 0)$ يكون :

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

تطبيق المتراجحتين :

تأتي أهمية متراجحتي ماركوف و تشيبتشيف كوننا نستطيع بوساطتها تحديد حدود الاحتمال لمتغير عشوائي وذلك عند معرفتنا للمتوسط فقط $E(X)$ أو المتوسط والتباين معا وذلك دون معرفتنا للتوزيع

الاحتمالي لهذا المتغير .

تمرين :

إذا افترضنا أن عدد الأجهزة التي تنتجها شركة سيرونكس أسبوعيا هو متغير عشوائي متوسطه (50) جهازا ،**والمطلوب :**

١- ماذا يمكنك أن تقول عن احتمال أن يتجاوز عدد الأجهزة المنتجة في أسبوع ما ال (75) جهازا .

٢- إذا علمنا أن التباين لعدد الأجهزة المنتجة أسبوعيا هو (25) جهازا ،فماذا نقول عن احتمال أن يكون عدد الأجهزة المنتجة لهذا الأسبوع يقع ما بين (40) و (60) جهازا .

الحل

نفرض أن (X) متغير عشوائي يدل على عدد الأجهزة المنتجة أسبوعيا فيكون $E(X) = 50$.

١-

$$P\left(X > \underbrace{75}_{=\varepsilon}\right) \leq E(X)$$

حسب متراجحة ماركوث

$$P\left(X > \underbrace{75}_{=\varepsilon}\right) \leq \frac{50}{75} \leq \frac{2}{3} \approx 60\%$$

٢-

$$P(40 < X < 60) = P(50 - 10 < X < 50 + 10)$$

$$P(40 < X < 60) = P\left(\underbrace{|X - 50|}_{\mu} < \underbrace{10}_{\varepsilon}\right)$$

$$P(40 < X < 60) = 1 - P(|X - 50| \geq 10)$$

ولكن حسب مبرهنة تشيبتشيف :

$$P\left(\underbrace{|X - 50|}_{\mu} \geq \underbrace{10}_{\varepsilon}\right) \leq \left(\frac{\sigma^2 = 25}{\varepsilon^2 = 100}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\underbrace{|X - 50|}_{\mu} \geq \underbrace{10}_{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{4}$$

ومنه يكون :

$$P(40 < X < 60) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$$

مبرهنة (قانون الأعداد الكبيرة)

إذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ متتالية من متغيرات عشوائية مستقلة والتي لها جميعا التوزيع نفسه بمتوسط (μ) وتباين (σ^2) محددين عندئذ من أجل $(\varepsilon > 0)$ تكون النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\underbrace{\left|\frac{\sum x_i}{n} - \mu\right|}_{\bar{X}\text{متوسط العينة}} \geq \varepsilon\right) = 0$$

البرهان

لدينا :

$$E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} (E x_i)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} (\mu) = \frac{1}{n} . n\mu = \mu$$

ولدينا أيضا :

$$V\left(\frac{E x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} . V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{E x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} . \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{E x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} . \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} . n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

وبالتالي حسب متراجحة تشيبتشيف من أجل $(\varepsilon > 0)$ فإن :

$$P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n} - E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

وبأخذ نهاية الطرفين نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

تطبيق المبرهنة :

هو لتقدير متوسط التوزيع الذي تتبعه متتالية متغيرات عشوائية مستقلة حيث أنه كلما كان (n) حجم المتتالية كبيرا كان $\overline{x_n}=\frac{\sum x_i}{n}$ أقرب إلى (μ) .

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة ^نهى حبشية ^نور مهرة

ابتسامتك في وجه أخيك صدقة . . وفي وجه صديقك تشعره بمحبتك . .

وفي وجه عدوك تشعره بقوتك . . لذلك ابتسم