مثال: لتكن R حلقة واحدية و $\mathcal{L}=R\text{-mod}$ فئة المودولات اليسارية فوق الحلقة R لنفرض أن $u: A\longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ تشاكل مودولات عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1) المورفيزم u ايبيمورفيزم

2) المورفيزم u غامر.

الحل $1 \Rightarrow 2$ لنفرض جدلاً أن u ليس غامراً عندئذٍ $u(A)\subsetneq B$

(أي يوجد عنصر من B لا يرتبط بأي عنصر من A)

لنأخذ المودول $C=B_1\oplus B_2$ حيث $B_i\cong B$ حيث $i=1,2$

لنفرض هنا التشاكل $\pi_i: B\longrightarrow B_i$

لنفرض أن $\tau_i: B_i\longrightarrow C$ الاحتواء القانوني

عندئذٍ $v_i=\tau_i\pi_i: B\longrightarrow C$

أي v_i مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

$$\forall x\in B;\ v_1(x)=(\tau_1\pi_1)(x)=\tau_1(x)=(x,0)$$
$$v_2(x)=(\tau_2\pi_2)(x)=\tau_2(x)=(0,x)$$
$$v_1(x)-v_2(x)=(x,-x)$$

لنأخذ المودول الجزئي من C

$$K=\langle v_1(x)-v_2(x)\quad \forall x\in u(A)\rangle$$

ولنأخذ مودول الخارج: $D=\frac{C}{K}$

ولنفرض أن $W: C\longrightarrow \frac{C}{K}$ التشاكل القانوني الغامر

لأجل كل $x\in u(A)$ فإن $v_1(x)-v_2(x)\in K$

ومنه $(v_1(x)-v_2(x))+K=K$

$$v_1(x)+K=v_2(x)+K$$
$$W v_1(x)=W v_2(x)$$

لكن $u(A)\subsetneq B$ يوجد $b\in B$

حيث $b\notin u(A)$ عندئذٍ $v_1(b)-v_2(b)\notin K$

$$(v_1(b)-v_2(b))+K\neq K$$

$u: A \to B$

/ /

$v_1(b) + k \neq v_2(b) + k$

$w v_1(b) \neq w v_2(b)$

ومنه $w v_1 \neq w v_2$

إذا كان $a \in A$ فإن $u(a) \in u(A)$ ومنه

$(w v_1)(u(a)) = (w v_2)(u(a))$

$((w \cdot v_1) \cdot u)(a) = ((w \cdot v_2) \cdot u)(a)$

لما كان $u: A \to B$ ابيمورفيزم فإن التطبيق

$\beta: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$

$\beta(\lambda) = \lambda \cdot u$ متباين.

وذلك مهما أي كان $X \in ob(\mathcal{L})$

لنأخذ $X = D$ نجد أن

$w \cdot v_1, w \cdot v_2 \in \mathcal{L}(B, D)$

$\beta(w v_1) = (w v_1) \cdot u$

$\beta(w \cdot v_2) = (w v_2) \cdot u$

فإن: $\beta(w v_1) = \beta(w v_2)$

وبما أن β تباين $w v_1 = w v_2$

وهذا غير ممكن. ومنه فإن u غامر

لنفرض أن u غامر $\beta: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$ (1) ⟵ (2)

ليكن $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}(B, X)$ بحيث $\mu_1 u = \mu_2 u$

لما كان $u(A) = B$ فإن

$\forall b \in B \ \exists x \in A \ ; \ b = u(x)$

$\mu_1(b) = \mu_1(u(x)) = \mu_2(u(x)) = \mu_2(b)$

$\Longrightarrow \mu_1 = \mu_2$

ومنه فإن u ابيمورفيزم

تعريف: ليكن $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة ولنفرض $f, g: F \to G$ مورفيزمات دالية عندئذ.

$$f = g \Leftrightarrow \forall A \in ob(\mathcal{L}_1)\ f(A) = g(A)$$

مبرهنة: ليكن $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة و $f: F \to G$ مورفيزم دالي
إذا كان f إيزومورفيزم دالي عندئذ يوجد مورفيزم دالي
آخر وحيد $g: G \to F$ يحقق

$$g \cdot f = I_F \qquad f \cdot g = I_G$$

البرهان: لنفرض أن f إيزومورفيزم دالي نأخذ أياً كان $A \in ob(\mathcal{L}_1)$
فإن

$$f(A): F(A) \to G(A)$$

إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$.
ومنه يوجد مورفيزم $g(A): G(A) \to F(A)$ للفئة $\mathcal{L}_2$ يحقق

$$f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)} \quad \text{و} \quad g(A) \cdot f(A) = I_{F(A)}$$

لنعرف $g: G \to F$ بالشكل

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1),\ g(A): G(A) \to F(A)$$

ليكن $u: A \to B$ مورفيزم ما من الفئة $\mathcal{L}_1$ ولنبرهن أن المخطط
التالي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "g(A)"] \arrow[d, "G(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\
G(B) \arrow[r, "g(B)"'] & F(B)
\end{tikzcd}$$

أي لنبرهن على أن: $F(u) \cdot g(A) = g(B) \cdot G(u)$

من جهة أخرى لما كان f مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي
تبديلي لأجل u:

/ /

$$\begin{tikzcd}
 & G(A) \\
F(A) \arrow[r, "f(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(A) \arrow[u, "I_{G(A)}"'] \arrow[d, "G(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "f(B)"'] \arrow[d, "I_{F(B)}"'] & G(B) \\
F(B) &
\end{tikzcd}$$

أي أن: $G(u).f(A) = f(B).F(u)$

لأن: $F(u).g(A) = I_{F(B)} . F(u).g(A)$

$= (g(B).f(B))\,F(u).g(A)$

$= g(B).(f(B)\ F(u)).g(A)$

$= g(B).(G(u).f(A)).g(A)$

$= g(B).G(u).I_{G(A)}$

$= g(B).G(u)$

ومنه يكون g مورفيزم دالي

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1);\ f.g(A) = f(A).g(A) = I_{G(A)}$$

$$f.g = I_G \ ,\ g.f = I_F$$

لنفرض أن $h: G \longrightarrow F$ مورفيزم دالي فيحقق

$$f\,h = I_G \ ,\ h.f = I_F$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1);\ h(A) = I_{F(A)} . h(A)$$

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "h(A)"] & F(A) \arrow[d, "I_{F(A)}"] \\
G(A) \arrow[u, "I_{G(A)}"] & F(A)
\end{tikzcd}$$

$= (g(A).f(A))\ h(A)$

$= g(A).(f(A).h(A)) = g(A).I_{G(A)} = g(A)$

$\Longrightarrow h = g$

مبرهنة: لتكن C فئة و $Sets$ فئة المجموعات ولتكن $X \in Ob(C)$

وليكن $F: C \to Sets$ دالياً

ولنفرض أن $hom(h_x, F)$ فئة مورفيزمات التحويلات الطبيعية من h_x إلى F

عندئذ يوجد تطبيق

$$\alpha: hom(h_x, F) \to F(X)$$

متباين وغامر

انتهت المحاضرة