

مثال: لنكن R حلقة راسدية و $L = R\text{-mod}$ فئة المودول اليسارية فوقها، حلقة R لتفرض ان $A \rightarrow B$ u مصفوفة L تشاكل مصدقات عندئذ شرط الترتيب متكافئة:

(أ) المورنيزم u ايسوموريزم

(ب) المورنيزم u غامر.

الحل: \Leftarrow لتفرض ان u ليس غامر عندئذ $u(A) \subsetneq B$

ذي u هو مصفوفة B و u يتك $u(A)$ عنصر من A

لنأخذ المودول $C = B_1 \oplus B_2$ حيث $B_i \cong B$ حيث $i=1,2$

لتفرض ان هذا التماثل $\pi_i: B \rightarrow B_i$

لتفرض ان $\tau_i: B_i \rightarrow C$ الالتهاد لقانوني

عندئذ $\nu_i = \tau_i \pi_i: B \rightarrow C$

ان ν_i مورنيزم للفتة L

$$\forall x \in B; \nu_1(x) = (\tau_1 \pi_1)(x) = \tau_1(x) = (x, 0)$$

$$\nu_2(x) = (\tau_2 \pi_2)(x) = \tau_2(x) = (0, x)$$

$$\nu_1(x) - \nu_2(x) = (x, -x)$$

لنأخذ المودول الجزئي من C

$$K = \langle \nu_1(x) - \nu_2(x) \mid \forall x \in u(A) \rangle$$

$$D = \frac{C}{K}$$

ونأخذ مودول خارج

ولتفرض ان $w: C \rightarrow \frac{C}{K}$ (التشاكل لقانوني) الغامر

$$\forall x \in u(A) \text{ فانه } \nu_1(x) - \nu_2(x) \in K$$

$$(\nu_1(x) - \nu_2(x)) + K = K$$

$$\nu_1(x) + K = \nu_2(x) + K$$

$$w(\nu_1(x)) = w(\nu_2(x))$$

لنأخذ $b \in B$ $u(A) \subsetneq B$ u ليس

عندئذ $b \notin u(A)$

$$(\nu_1(b) - \nu_2(b)) + K \neq K$$

$$r_1(b) + k \neq r_2(b) + k$$

$$w r_1(b) \neq w r_2(b)$$

$$w r_1 \neq w r_2$$

فإنه $u(a) \in \text{ker}(A) \iff a \in A \iff \text{ker}(A)$

$$(w r_1)(\text{ker}(A)) = (w r_2)(\text{ker}(A))$$

$$((w r_1) \cdot u)(a) = ((w r_2) \cdot u)(a)$$

لذلك $u: A \rightarrow B$ ايسومورفيزم، بالتالي $B = \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$

$$\beta(\lambda) = \lambda \cdot u$$

فذلك ان $X = \text{ob}(\mathcal{L})$

شبه $X = D$ حيث

$$w r_1, w r_2 \in \mathcal{L}(B, D)$$

$$\beta(w r_1) = (w r_1) \cdot u$$

$$\beta(w r_2) = (w r_2) \cdot u$$

$$\beta(w r_1) = \beta(w r_2)$$

$$w r_1 = w r_2$$

وهذا يعني u متباين

$\beta: \mathcal{L}(B, X) \rightarrow \mathcal{L}(AX)$ لتفرض ان u غير $(1) \iff (2)$

$$\mu_1 u = \mu_2 u \iff \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}(B, X)$$

$$u(A) = B \iff u \in \mathcal{L}$$

$$\forall b \in B \exists x \in A : b = u(x)$$

$$\mu_1(b) = \mu_1(u(x)) = \mu_2(u(x)) = \mu_2(b)$$

$$\implies \mu_1 = \mu_2$$

وهذا يعني u ايسومورفيزم

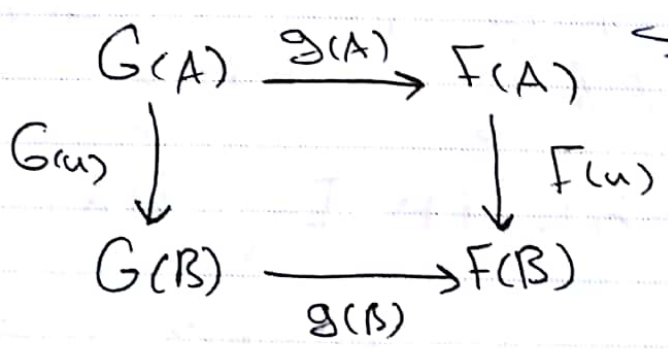
تعريفًا ليكن $f, g: L_1 \rightarrow L_2$ دوالاً متماثلتين ونقول
 $f = g \iff \forall A \in \text{ob}(L_1) \quad f(A) = g(A)$

ملاحظة: ليكن $f, g: L_1 \rightarrow L_2$ دوالاً متماثلتين و $f: L \rightarrow G$ مورنيتم دالي
 إذا كان f ايزومورفيتم دالي عندئذ يوجد مورنيتم دالي
 آفودرجيد $g: G \rightarrow L$ كحقيقه
 $f \circ g = I_G$ $g \circ f = I_L$

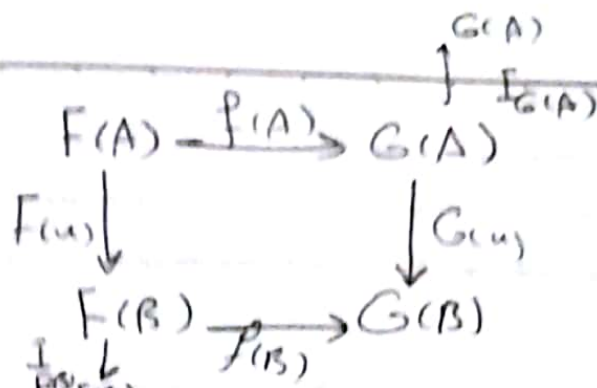
الهدف: لفرض ان f ايزومورفيتم دالي نثبت ان $A \in \text{ob}(L_1)$
 فان $f(A): F(A) \rightarrow G(A)$

اي مورنيتم للفتة L_2 ومنه يوجد مورنيتم $g(A): G(A) \rightarrow F(A)$ للفتة L_2 بحقيقه
 $g(A) \circ f(A) = I_{F(A)}$ و $f(A) \circ g(A) = I_{G(A)}$

لفرض $f: G \rightarrow F$ بالتركيب
 $\forall A \in \text{ob}(L_1), g(A): G(A) \rightarrow F(A)$
 ليكن $u: A \rightarrow B$ مورنيتم للفتة L_1 والهدف ان نحاط



اي البرهان على ان $f(u) \circ g(A) = g(B) \circ G(u)$
 من هوية ايزومورفيتم f مورنيتم دالي نانه الحاطه التي
 تريبي لاجل u :



$$\begin{aligned}
 G(u) \cdot f(A) &= f(B) \cdot F(u) \quad \text{حيث } u \in A \\
 F(u) \cdot g(A) &= I_{F(B)} \cdot F(u) \cdot g(A) \quad \text{حيث } u \in A \\
 &= (g(B) \cdot f(B)) \cdot F(u) \cdot g(A) \\
 &= g(B) \cdot (f(B) \cdot F(u)) \cdot g(A) \\
 &= g(B) \cdot (G(u) \cdot f(A)) \cdot g(A) \\
 &= g(B) \cdot G(u) \cdot I_{G(A)} \\
 &= g(B) \cdot G(u) \cdot g(A)
 \end{aligned}$$

من أجل جميع $A \in \text{ob}(\mathcal{C}_1)$ ؛ $f \cdot g(A) = f(A) \cdot g(A) = I_{G(A)}$

$$f \cdot g = I_G, \quad g \cdot f = I_F$$

نفسه ان $h: G \rightarrow F$ هو $h(A) = I_{F(A)}$ حيث $f \cdot h = I_G$ ، $h \cdot f = I_F$

$$\forall A \in \text{ob}(\mathcal{C}_1); h(A) = I_{F(A)} \cdot h(A)$$

$$\begin{array}{ccc}
 h(A): G(A) & \xrightarrow{f(A)} & F(A) \\
 \uparrow I_{G(A)} & & \downarrow I_{F(A)} \\
 G(A) & \xrightarrow{f(A)} & F(A)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= (g(A) \cdot f(A)) \cdot h(A) \\
 &= g(A) \cdot (f(A) \cdot h(A)) = g(A) \cdot I_{F(A)} = g(A)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h = g$$

