2-5-2018

نظري

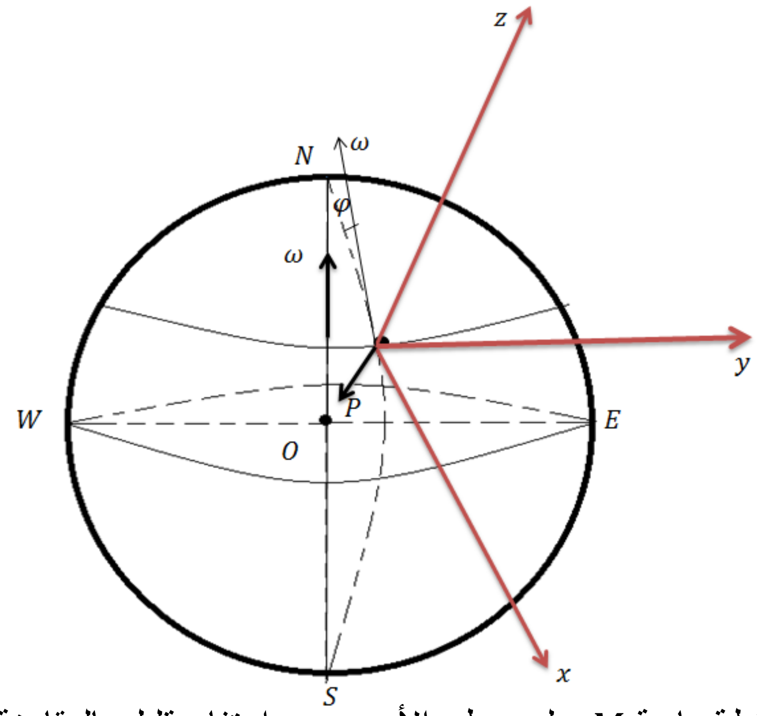
◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة الثانية عشر

◄ عنوان المحاضرة: دراسة تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة

بسم الله وبالله المستعان.. لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول بها دراسة تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة

دراسة تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة



ندرس السقوط الحر لنقطة مادية M على سطح الأرض من ارتفاع قليل بالمقارنة مع طول نصف قطر الكرة الأرضية حيث تؤثر على هذه النقطة المادية قوة الثقالة الأرضية فقط ((P وزن الجسم)) وسوف نهمل مقاومة الهواء ولنأخذ جملة احداثية متحركة مع الأرض فيها المحور oz يتجه شاقولياً نحو الأعلى والمحور ox مماس لخط الطول ويتجه نحو الجنوب واخيراً المحور oy مماس لخط العرض ويتجه نحو الشرق عند معالجة سقوط هذه النقطة بالنسبة لهذه الجملة الاحداثية المختارة يجب أن نأخذ بعين الاعتبار قوة العطالة الجرّية وقوة العطالة المتممة (J_c, J_e) إضافة إلى قوة ثقلها ، إن قوة العطالة الجرّية تساوي $J_e = m\omega^2 r$ ذلك لأن دوران الأرض حول محورها يتم بسرعة زاوية ((أي التسارع يساوي الصفر)) و(r) هو بعد النقطة عن محور الدوران، إن دوران الأرض حول محورها يعتبر بطيئاً بالنسبة للنجوم

الأخرى ويتم بسرعة دورة واحدة خلال 23 ساعة و56 دقيقة و4 ثوانٍ أي أن السرعة الزاوية

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0.00000722\,.s^{-1}$$

من ذلك يتبين لنا صغر قوة العطالة الجرّية فهذه القوة تتناسب طرداً مع مربع ω فإذا رمزنا بقوة جذب الأرض للنقطة المادية بالرمز $\vec{F}$ فإن الاختلاف بين $\vec{F}$ و $\vec{P}$ قوة الثقالة يكون صغيراً جداً ويبلغ حده الأعظمي أي $((F + J_e = P))$ عند خط الاستواء تساوي 3470 وبالتالي نلاحظ أن قوة العطالة الجرّية تدخل في قوة الثقالة الارضية $P = mg$ المتجهة حسب الاتجاه السالب للمحور oz (P محمولة على oz) ينتج مما سبق أنه من أجل تأثير دوران الأرض على سقوط الأجسام يكفي فقط إضافة قوة العطالة المتممة $J_c = -m\Gamma_c$ للقوة P ((لماذا أهملت قوة العطالة الجرّية))

بإسقاط علاقة القوة النسبية $m\Gamma_r = \vec{J_c} + \vec{J_e} + \vec{F} \Leftarrow m\Gamma_r = \vec{J_c} + \vec{F}$ ((اهملنا $\vec{J_e}$ بسبب صغرها))

وبالإسقاط على جملة المحاور الاحداثية فنجد :

$$mx'' = -m\Gamma_{cx} \quad , \quad my'' = -m\Gamma_{cy} \quad , \quad mz'' = -mg - m\Gamma_{cz}$$

$$\boxed{x'' = -\Gamma_{cx} \quad , \quad y'' = -\Gamma_{cy} \quad , \quad z'' = -g - \Gamma_{cz} \ \ldots.(1)}$$

$$\Gamma_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v_r}] \Rightarrow \Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

إذا رمزنا بـ φ للزاوية المحصورة بين محور الدوران والمحور oz فإن ..

من الرسم نجد: $\omega_x = -\omega\cos\varphi \ , \ \omega_y = 0 \quad , \ \omega_z = \omega\sin\varphi$

نجد ....

$$\Gamma_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\Gamma_{cx} = -2\omega\sin\varphi\, y', \Gamma_{cy} = 2\omega(\cos\varphi\, z' + \sin\varphi\, x'), \Gamma_{cz} = -2\omega\cos\varphi\, y' \ \ldots(2)}$$

وبالتالي إذا عوضنا (2) بالمعادلات (1) ...

$$\boxed{\begin{gathered} x'' = 2\omega\sin\varphi\, y' \quad , \quad y'' = -2\omega(\cos\varphi\, z' + \sin\varphi\, x') \\ z'' = -g + 2\omega\cos\varphi\, y' \ \ldots\ldots(3) \end{gathered}}$$

وهي معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية يمكن مكاملتها مرة واحدة مباشرةً لأن (φ, ω) ثوابت وبالتالي من أجل ذلك نفترض أن

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = y' = z' = 0 \end{cases}$$

ضمن هذه الشروط يكون لدينا بالمكاملة ...

$$x' = 2\omega \sin\varphi\, y\,, y' = -2\omega(\cos\varphi\, z + \sin\varphi\, x), z' = -gt + 2\omega\cos\varphi\, y \ldots (4)$$

ملاحظة : من شروط البدء يكون جميع الثوابت المكاملة تساوي الصفر.

إن مكاملة هذه المعادلات بالطرق العادية ليس بالأمر السهل لذلك نكاملها بطريقة تقريب السلاسل ونقربها حسب التقريب الصفري ونفترض $\omega = 0$ فنجد..

$$x' = 0 \quad , \quad y' = 0 \quad , \quad z' = -gt$$

وبالمكاملة مرة اخرى وبأخذ الثوابت اصفار حسب شروط البدء نحصل على...

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2$$

وبالتالي بوضع هذه القيم بالمعادلات ...(4) نحصل على...

$$x' = 0\,, \quad y' = \omega g t^2 \cos\varphi\,, \quad z' = -gt$$

بالمكاملة مرة اخرى نحصل على...

$$x = 0\,, \quad y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi\,, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 \ldots.(5)$$

هذه المعادلات تعطي قانون حركة نقطة مادية حيث تدخل فيها قوة العطالة المتممة وبعبارة آخرى ظهور تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة وبالتالي فإن هذه النقطة المادية الساقطة تميل عن الشاقول بتجاه الشرق وللحصول على تقريب ادق (الثاني) نعوض المعادلات (5) بالمعادلات (4) وبالتالي نحصل على التقريب الثاني من الشكل :

$$x' = \frac{2}{3}\omega^2 g t^3 \sin\varphi . \cos\varphi \quad , \quad y' = \omega g t^2 . \cos\varphi \;,$$
$$z' = -gt + \frac{2}{3}\omega^2 g t^3 . \cos\varphi$$

بالمكاملة نجد :

$$x = \frac{1}{6} g t^4 \omega^2 \sin\varphi . \cos\varphi \quad , \quad y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi \quad ,$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}t^4\omega^2 . \cos\varphi \ldots \ldots (6)$$

نلاحظ من هذه المعادلات أن مركبة جديدة ظهرت على x وبالتالي هذه المعادلات تفسر لنا ما يلي

1) تآكل ضفاف الأنهار اليمنى من نصف الكرة الشمالية وتآكل ضفاف الأنهار اليسرى من نصف الكرة الجنوبي وذلك بفرض أن النهر يسير باتجاه خط الطول شمالاً أو جنوباً لأن القوة المتممة ((كورليس)) $J_c = 2[\omega \wedge v_r]$ هذه القوة ((قوة العطالة)) تتجه نحو الشرق إذا اتجه هذا التيار باتجاه الجنوب .

2) تفلطح الأرض عند خط الاستواء بسبب القوة العطاليَة الجرَية التي تؤثر على جسم كتلته m بقوة $J_e = m\omega^2 R.\cos\varphi$ حيث R هي نصف قطر الكرة الأرضية .

و هذا التقريب يسمى **بتقريب السلاسل** هذه المعادلات تعطي قانون الحركة لنقطة مادية حيث تدخل فيها قوة العطالة المتممة اي ان ظهور تأثير دوران الأرض على الأجسام الساقطة ، وبالتالي من هذه المعادلات عند سقوط النقطة المادية فإنها تميل عن الشاقول باتجاه الشرق وميلانها يعطى بالعلاقة $y = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi$ وهو متجه نحو الشرق ، أما التقريب الثاني فيكون متجه نحو شرق الجنوب .

مثال

يتم الصعود الشاقولي لطائرة عامودية وفق المعادلة $z = 0.25t^2$ أما معادلة دوران مروحتها فتأخذ الشكل $\varphi = 3t^2$ حيث t يقدر بالثانية و z بالمتر و φ بالراديان ، أوجد السرعة المطلقة والتسارع المطلق لنقطة مادية M من المروحة تبعد بمقدار $R = 0.5m$ على محور الدوران خلال الخمس ثواني الأولى من الإقلاع .

الحل

لنأخذ جملة إحداثية متحركة مع هيكل الطائرة وجملة إحداثية أخرى ثابتة مع الأرض فتكون الحركة المركبة للنقطة المادية M من حركتها مع الروحة ((نوع الحركة دائرية)) ثم حركتها الشاقولية مع هيكل الطائرة مستقيمة ، تعتبر الحركة الدورانية للمروحة حركة نسبية أما الصعود الشاقولي للطائرة فيعتبر حركة جرّية وبالتالي من نظرية تركيب السرع $v_a^2 = v_e^2 + v_r^2$ إن السرعة الجرّية للنقطة المادية تساوي سرعة أي نقطة من هيكل الطائرة تنطبق في لحظة زمنية على هذه النقطة المادية وبما أن جميع النقاط في حركة الصعود تكون واحدة فإن السرعة الجرّية $v_e = z' = 0.5t$ ومن أجل الحصول على السرعة النسبية يلزم تحديد السرعة الزاوية وبالتالي $\omega = \varphi' = 6t$ والسرعة النسبية حيث $v_r = R.\omega$ ومنه

$$v_r = R.\omega = (0.5)(6t) = 3t$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \Rightarrow v_a = \sqrt{(3t)^2 + (0.5t)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_a = \sqrt{9.25}t}$$

بعد مرور 5 ثانية فإن السرعة المطلقة تكون $v_a = 15.21$

حساب التسارع المطلق وذلك حسب نظرية تركيب السرع

$$\vec{\Gamma_a} = \vec{\Gamma_e} + \vec{\Gamma_c} + \vec{\Gamma_r}$$

$$\Rightarrow \Gamma_a = \sqrt{(\Gamma_e)^2 + (\Gamma_r)^2 + (\Gamma_c)^2} \dots\dots (1)$$

Syria Math Team

$$\Gamma_e = \frac{dv_e}{dt} = z'' = 0.5$$

$$\vec{\Gamma_r} = \vec{\Gamma_\tau} + \vec{\Gamma_n}$$

$$\vec{\Gamma_\tau} = R\varepsilon\vec{\tau} \Longrightarrow \vec{\Gamma_\tau} = (0.5)\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} \Longrightarrow \vec{\Gamma_\tau} = 3\vec{\tau} \Longrightarrow \Gamma_\tau = 3$$

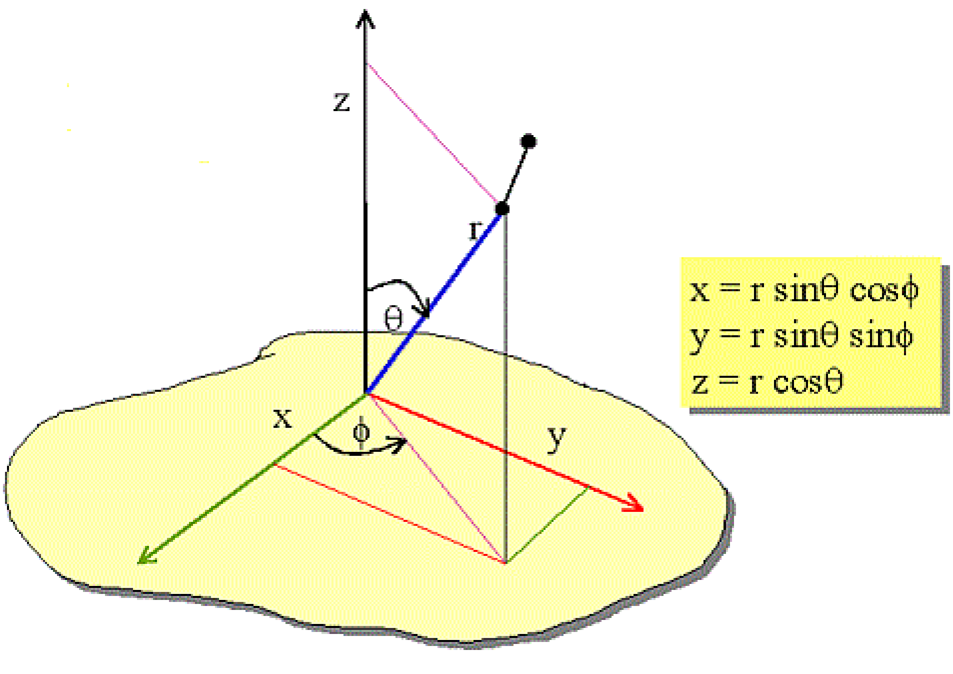
$$\vec{\Gamma_n} = \mathrm{R}.\,\omega^2\vec{n} = (0.5)(6t)^2\vec{n} = 18t^2\vec{n}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma_r} = 3\vec{\tau} + 18t^2\vec{n} \Longrightarrow \Gamma_r = \sqrt{(3)^2 + (18t^2)^2}$$

لأنه ليس لديه دوران لكن لديه صعود ((الحركة مستقيمة)) $\vec{\Gamma_c} = 0$

نعوض كل من $\Gamma_e, \Gamma_r, \Gamma_c$ في المعادلة (1) فنجد :

$$\boxed{\Gamma_r = \sqrt{(0.5)^2 + (3)^2 + (18t^2)^2}}$$



انتهت المحاضرة

إعداد : محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي