◄ دكتورة المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الثانية عشرة ◄ عنوان المحاضرة: المنحني الأملس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-أمثلة عن المنحني الأملس .

2- المنحني الأملس قطيعاً .

أمثلة عن المنحني الأملس .

1) أي دائرة ممسوحة مرة واحدة ((بالاتجاهين)) هي منحنٍ أملس .

الإثبات:

إن $0 \le t \le 2\pi$: $\delta(t) = a + re^{it}$ ممثل وسيطي للدائرة $C^+(a,r)$:

1) قابل للاشتقاق على $[0,2\pi]$ كما أن $\delta'(t) = ire^{it}$ مستمر على مجال $[0,2\pi]$.

2) $\delta'(t) = ire^{it} \neq 0$: $\forall t \in [0,2\pi]$

لأن $|\delta'(t)| = r > 0$

3) δ متباين على مجال $[0,2\pi[$ لان $\delta(t_1) = \delta(t_2) \Leftrightarrow e^{it_1} = e^{it_2}$

$\Leftrightarrow t_1 = t_2 + 2\pi k$: $t_1, t_2 \in [0,2\pi[$

وبما أن $t_1, t_2 \in [0,2\pi[$ $\Leftrightarrow$ $t_1 = t_2$

ثم أن $\delta'(0) = \delta'(2\pi)$ لان

$\delta'(0) = ire^{i0} = ir$

$$\delta'(2\pi) = ire^{i2\pi} = ir$$

بالنتيجة فإن $C^+(a,r)$ هو منحني أملس لأنه حقق الشروط الثلاثة بنفس الأسلوب نستطيع اثبات ان $C^-(a,r)$ هو منحني أملس .

2) الدائرة الممسوحة أكثر من مرة هو منحنٍ غير أملس .

الإثبات :

وذلك لأن الشرط 3 غير محقق وذلك لأنه عندما يمر المنحني من نقطة ستكون غير بسيطة و بالتالي هو غير أملس .

3)أي قطعة مستقيمة موجهة هي منحنٍ أملس .

الإثبات

لنفرض أن z_2, z_1 هي بداية ونهاية القطعة المستقيمة على الترتيب و عندها يكون التمثيل الوسيطي لهذه القطعة :

$$\delta(t) = (1-t)z_1 + tz_2$$

بقي من السهل التحقق من الشروط الثلاثة السابقة ((تترك للقارئ))

ملاحظة : أي تابع حقيقي لمتحول حقيقي مطرد ((متزايد تماماً او متناقص تماماً)) يكون متباين والعكس غير صحيح

يجب أن تعلم ما يلي :

- إن تباين أحد الجزئين (الحقيقي أو التخيلي) لتابع عقدي لمتحول حقيقي يعني تباين التابع العقدي على ذلك المجال أي أن

$$\delta(t_1) = \delta(t_2) \Leftarrow \begin{cases} x_1(t_1) = x_2(t_2) \\ \text{أو} \\ y_1(t_1) = y_2(t_2) \end{cases}$$

لكن العكس غير صحيح والمثال على ذلك إن $\cos(t) + isin(t)$ هو تابع متباين على المجال $[0,2\pi]$ لكن كل من $sin(t)$, $\cos(t)$ غير متباين على ذلك المجال .

4) $\delta(t) = t + it^2$ هو منحني أملس .

الاثبات

هو عبارة عن قطع مكافئ لأنه لو أخذنا الوسيط $y = t^2$, $x = t$ فيصبح لدينا $y = x^2$

والتحقق من الشروط الثلاثة سهل هنا ومنه يكون المنحني أملس .

5) أي مثلث أو مربع أو مستطيل هو منحنٍ غير أملس .

الاثبات

بسبب اختلال الشرط الأول وذلك لعدم قابلية الاشتقاق عند الروؤس أي عدم وجود $\delta'(t)$ عند كل رأس

المنحني الأملس قطيعاً

نقول عن منحني Γ أنه أملس قطعياً إذا كان Γ مجموعاً لعدد منتهٍ من المنحنيات الملساء المتتالية أي اذا كان

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots\dots \oplus \Gamma_n$$

حيث $\Gamma_i \quad : \quad i = 1,,,,,,n$

كل منحني أملس هو أملس قطعياً ولكن العكس غير صحيح بالضرورة .

أمثلة :

- المثلث هو أملس قطعياً وهو غير أملس .
- الدائرة الممسوحة مرتين أول دورة هي منحني أملس أما الدورة الثانية ومجموعها تصبح منحنياً أملس قطعياً .

تعريف : نقول عن تابع عقدي :

$$\delta : \ [a,b] \to \mathbb{C}$$

إنه مقيس ((قابل للقياس)) أو إنه **طريق** إذا كان δ ذات تغير محدود .

- نقول عن المنحني Γ إنه طريق اذا كان نقطة أو أحد تمثيلات طريقاً ونعرف طوله

$$L(\Gamma) = L(\delta)$$

تمارين : عين المنحنيات الممثلة بـ

$$\delta_1(t) = t + it \quad : \quad 0 < t \leq 1$$
$$x = t \quad , \quad y = t$$

أي $x = y$ أي أنه حامل منصف الربع الأول ، أي أنها هي قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من 0 الى $1 + i$.

$$\delta_2(t) = (1 - 2t) + i(1 - 2t) \quad : \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن القسم حقيقي يساوي التخيلي فهو يمثل منحني حامله منصف الربع الأول و الثالث فهو قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من $1 + i$ الى 0 .

$$\delta_3(t) = \tan(t) + itan(t) \quad : \quad 0 < t \leq 1$$

نلاحظ أن القسم الحقيقي يساوي التخيلي فإن المنحني هو قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من

$$\tan(0) = 0 \text{ الى } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + itan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

مبرهنة : اذا كانت Γ منحني أملس و

$$\delta : \ [a, b] \to \mathbb{C}$$

تمثيل لـ Γ (الذي يحقق شروط المنحني الأملس) عندها يكون Γ قطعياً :

$$L(\Gamma) = L(\delta) = \int_a^b |\delta'(t)|\, dt$$

ملاحظة : Γ أملس $\Leftarrow$ Γ طريق **((والعكس غير صحيح بالضرورة))**

Syria Math Team

تكامل التابع العقدي على منحني عقدي

ليكن f تابع عقدي معرف على مجموعة مفتوحة $A \subseteq \mathbb{C}$ و Γ طريقاً في A بحيث يكون f محدوداً على A أي أن $\forall z \in \Gamma \quad : \quad |f(z)| \leq M$

وليكن

$$\delta : \ [a,b] \to \mathbb{C}$$

تمثيلاً وسيطياً لـ Γ عندئذ f كمول (قابل للمكاملة) على $\Gamma \Leftrightarrow fo\delta$ كمول ب النسبة ل $\delta \Leftrightarrow$

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\delta} f = \int_{\delta} fo\delta$$

حالة خاصة :

إذا كان f مستمراً على A وكان Γ فإن f كمول على Γ وإن :

$$\int f = \int f\left(\delta(t)\right)\delta'(t)\,dt$$

- يمكن التعميم من أجل Γ طريق أملس قطعياً و f مستمر قطعياً على $[a,b]$

هذا يكافئ أن الجزئين الحقيقي والتخيلي ل $fo\delta$ مستمران قطعياً على $[a,b]$

الاستمرار قطعياً لتابع العقدي بمتحول حقيقي على مجال مغلق إذا كان له عدد غير منتهي من نقاط الانقطاع من النوع الأول فإن كان

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots\ldots \oplus \Gamma_n$$

Γ_i أملس و f مستمر على Γ_i لاجل كل $i = 1,,,,,,n$ عندئذ

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f + \int_{\Gamma_3} f +,,,,,,,, + \int_{\Gamma_n} f$$

مثال :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

وهو معتل بسبب وجود الصفر :

Syria Math Team

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تمرين : هل التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ كمول على دائرة الواحدة وذا كان كذلك احسب تكامله على هذا الدائرة :

الحل :

((بما أنه لم يذكر عدد مرات المسح أو اتجاه الدوران فإنه ممسوح دورة واحدة وبالتجاه الموجب))

إن f مستمر على $\mathbb{C}^*$ وإن $C^+(0,1)$ منحني أملس في $\mathbb{C}^*$ $\Leftarrow$ f كمول على

$$\delta(t)=e^{it} \quad : \quad 0\le t$$

هو تمثيل ممسوح به ل $C^+(0,1)$ ب التالي فإن

$$\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta(t)}\delta'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}ie^{it}\,dt=[it]_0^{2\pi}=2\pi i$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل – احمد أبو النوت – نذير تيناوي

Syria Math Team