◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الحادي عشر والثانية عشر   عنوان المحاضرة: تكامل استيلجس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. مجموع استيلجس
2. تعريف تكامل استيلجس
3. شروط وجود تكامل استيلجس
4. خواص تكامل استيلجس
5. حساب تكامل استيلجس

تذكرة بتكامل ريمان:

$$A = (R)\int_a^b f(x)\,dx \;:\; R \ni A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \;:\; \Delta x = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k$$

عند كتابة (R) نقصد هنا تكامل ريمان كمان هو موضح أعلى و ليس قيمة عددية

وعند كاتبة (S) نقصد فيه تكامل استيلجس

مفهوم تكامل استيلجس (من خلال المفهوم نأخذ المجموع و التعريف)

اذا كانت g, f دالتين معرفتين و محدودتين على المجال $[a, b]$ نأخذ تجزئة ما P ل المجال $[a, b]$ بالشكل $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$

من ثمة نأخذ المجموع $x_{k-1} \le t_k \le x_k \;:\; S(f, g, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k$

حيث $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

ندعو $S(f, g, P)$ مجموع استيلجس للدالة f على g (f وفق g)(f بالنسبة ل g)

ملاحظة: في التحليل 5 الدوال التي نتعامل معها حقيقية لا نتعامل مع العقدية

تكامل استيلجس:

نقول عن f انه قابل للمكاملة بالنسبة لg على المجال $[a,b]$ إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يحقق

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta g_k \quad : \Delta x=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$$

حيث $t_k\in[x_{k-1},x_k]$ و $\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})$

هذا المجموع يسمى تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة ل g على المجال $[a,b]$ و يرمز له

$$A=(s)\int_a^b f\ dg$$

و هذا التعريف تعميم لتكامل ريمان و ستوضح الملاحظات التالية:

1- إذا أخذنا $g(x)=x$ عندها يصبح تكامل استيلجس من الشكل :

$$\int_a^b f(x)\,dg=\lim_{\Delta x\to 0}S(f,g,P)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(x_k-x_{k-1})=\lim_{\Delta x\to 0}S(f,x,P)=\int_a^b f(x)dx$$

حيث $\Delta x=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$ و $\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})$ و $1\le k\le n$

و هكذا نحصل على تكامل ريمان عندما تكون الدالة $g(x)=x$ من تكامل استيلجس

2- لنأخذ $f(x)=1$ أي أن f دالة ثابتة ولكن ليس بالضرورة أن تكون g ثابتة ايضا و منه يكون

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta g_k=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)-g(x_{k-1})$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}[g(x_1)-g(x_0)+g(x_2)-g(x_1)+\cdots+g(x_n)-g(x_{n-1})]$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}[g(b)-g(a)]=g(b)-g(a):\ g(x_n)=g(b)\ \ and\ \ g(x_0)=g(a)$$

أي أن $\int_a^b 1\,dg=g(b)-g(a)$ فإذا كانت $g(x)=x$ يكون $\int_a^b 1\,dx=b-a$ (ريمان)

تعريف تكامل استيلجس بالنسبة ل ϵ (ابسيلن):

نقول عن f أنها قابلة للمكاملة بالنسبة ل g على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon \Longrightarrow |S(f,g,P) - A| < \epsilon$$

شروط وجود تكامل استيلجس:

1- إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على المجال $[a,b]$ فإن الشرط الازم و الكافي ليكون تكامل استيلجس موجودا هو أن يتحقق الشرط $\lim_{\Delta x \to 0}(U - L) = 0$

حيث $\Delta x = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ و P تجزئة للمجال $[a,b]$

حيث $x_{k-1} \le x \le x_k$ $M_k(f) = \sup f(x)$: $U(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta g_k$

حيث $x_{k-1} \le x \le x_k$ $m_k(f) = \inf f(x)$: $L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta g_k$

2- اذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ و كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$فإن تكامل استيلجس يكون موجودا للدالة f على g

3- اذا كانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ و كانت $f(x)$ دالة مستمرة على نفس المجال $[a,b]$ كان تكامل استيلجس موجودا

4- اذا كانت $g(x)$ دالة تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ و كان f مستمرا على $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس موجود

5- اذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ و كانت g' موجودة و محدودا على المجال $[a,b]$ و كمول على نفس المجال فإن تكامل استيلجس يكون موجود و معينا بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)\ dg = (R)\int_a^b f\ .\ g' dx$$

خواص تكامل استيلجس:

1) $\int_a^b 1\ dg = g(b) - g(a)$

2) $(S)\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\, dg = \int_a^b f_1(x) dg \pm \int_a^b f_2(x)\, dg$

3) $(S)\int_a^b \alpha f(x) d(\beta g) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\, dg : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4) $\int_a^b f(x). d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1 \pm \int_a^b f(x) dg_2$

5) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة و كان $\int_a^b h\,dg$ موجودة و $\int_a^b f dg$ موجودة و

$$f(x) \le h(x)\,, \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f\,dg \le \int_a^b h\,dg$$

6) اذا كانت g دالة متزايدة على المجال $[a,b]$ و كان $\int_a^b f\,dg$ موجودا فإن

1- $\int_a^b |f(x)|dg$ يكون موجودا

2- $\int_a^b f^2\,dg$ يكون موجودا

3- $\left|\int_a^b f(x)\,dg\right| \le \int_a^b |f(x)|.dg$

7) اذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ و كان التكامل $\int_a^b f\,dg$ موجودا فإن التكاملين

$$\int_a^c f\ \ dg \quad و \quad \int_c^b f\ \ dg \quad : \quad a < c < b$$

موجودين و يحققان ما يلي

$$\int_a^b f\ \ dg = \int_a^c f\ dg + \int_c^b f\ dg$$

في تكامل استيلجس إذا كان $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ موجودين فإنه ليس بالضرورة أن يكون $\int_a^b f\,dg$ موجودا أما في تكامل ريمان إذا كان $\int_a^c f\ \ dx + \int_c^b f\ \ dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\ \ dx$ يكون موجود و بالعكس.

8) هذه الخاصة توضح لنا متى يكون عكس الخاصة السابعة صحيح في تكامل استيلجس

اذا كانت التكاملات $\int_c^b f\ \ dg \quad : \quad a < c < b$ و $\int_a^c f\ \ dg$ موجودين

و كانت احدا التابعين g, f مستمرا عند c و الأخر محدودا في جوار c فإن تكامل $\int_a^b f\ \ dg$ يكون موجودا و يحقق :

$$\int_a^b f\ \ dg = \int_a^c f\ dg + \int_c^b f\ dg$$

9) نظرية التكامل بالتجزئة:

اذا كان احدا التكاملين $\int_a^b f\ \ dg$ و $\int_a^b g\ \ df$ موجودا فإن الأخر يكون موجودا و

يحقق: $\int_a^b f\ \ dg + \int_a^b g\ \ df = [f(x).g(x)]_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$

10) اذا كان f مستمرا على $[a,b]$ و كان g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن القيمة المطلقة

$$\left|\int_a^b f \quad dg\right| \le \max_{a\le x\le b}|f(x)| \bigvee_a^b g$$

حساب تكامل استيلجس:

نقول عن الدالة انها درجية اذا كان مجموع قيمها منتهية.

الدالة الدرجية أو البسيطة $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} 1 : x=1 \\ 3 : x\in]1,4[\\ 5 \ : \ x=4 \\ 6 \ : \ x\in]4,6[\\ 7 \ : \ x=6 \\ 9 \ : \ x\in]6,10[\\ 10 \ : \ x=10 \end{cases}$$

تعريف الدالة الدرجية:

اذا كانت $g(x)$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت تعاني من عدد من الإنقطاعات من النوع الأول في عدد منته من النقاط c_k حيث:

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n < b$$

فإذا كانت $g(x)$ ثابتة في كل مجال مفتوح

$$]a,c_1[,]c_1,c_2[,\dots\dots\ ,]c_{n-1},c_n[,]c_n,b[$$

فإننا ندعو الدالة $g(x)$ أنها درجية

أمثلة:

$[x]$ أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x و $[x]$ او $[x]$أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x

و الدوال المذكورة أعلى من أكثر الدوال استخداما في الدوال الدرجية

اذا كانت c_k نقطة انقطاع ندعو $g_k = g(c_k+0) - g(c_k-0)$ القفزة عند c_k أي

$$g_k = \lim_{\substack{> \\ x\to c_k}} g(x) - \lim_{\substack{< \\ x\to c_k}} g(x) \quad (*)$$

أما القفزة عند أطراف المجال :

القفزة عند a: $g_a = g(a+0) - g(a)$ أي $g_a = \lim_{\substack{> \\ x\to a}} g(x) - g(a)$

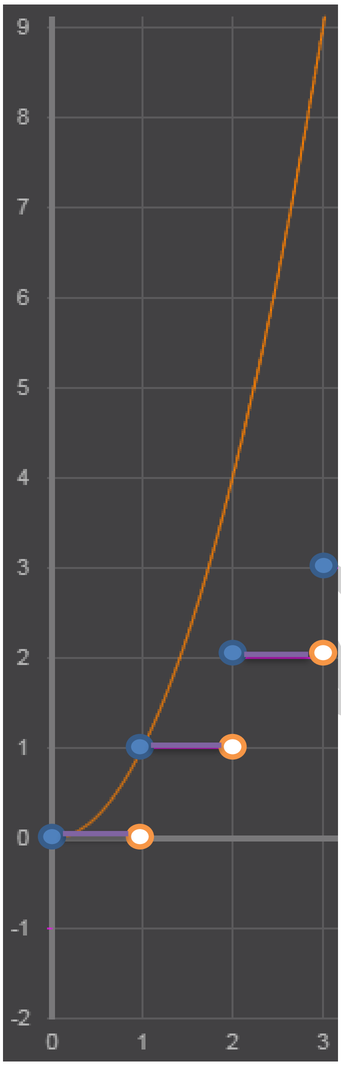
القفزة عند b: $g_b = g(b) - g(b-0)$ أي $g_b = g(b) - \lim_{\substack{< \\ x\to b}} g(x)\,(@)$

مبرهنة:

اذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت القفزات لـg_k عند c_k حيث

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$$

بحيث c_k حيث $1 \le k \le n$ نقاط انقطاع للدالة $g(x)$



و كانت f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$بحيث لا تكون g و f غير مستمرتين معا من اليمين عند c_k او غير مستمرتين معا من اليسار عند c_k عندئذ تكامل استيلجس يكون موجودا او يعطى بالشكل

$$(S)\int_a^b f\ dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k$$

و في حالة كانت a, b نقاط انقطاع من النوع الأول ستكون بالشكل العام كالتالي:

$$(S)\int_a^b f\ dg = f(a).g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k + f(b).g_b$$

سوف نطبق هذه النظرية من خلال **المثال** التالي:

$$\int_0^3 x^2\, d[x] \quad : \quad [x] = \begin{cases} 0 & : \ 0 \le x < 1 \\ 1 & : \ 1 \le x < 2 \\ 2 & : \ 2 \le x < 3 \\ 3 & : \ x = 3 \end{cases}$$

بما أن f دالة مستمرة على المجال $[0,3]$ فيكون تطبيق المبرهنة السابقة كالتالي:

نلاحظ أن نقاط الانقطاع هنا هي : $c_1 = 1\ , c_2 = 2\ ,\ c_3 = 3$

$$\int_0^3 x^2\, d[x] = f(1).\, g_1 + f(2).\, g_2 + f(3).\, g_3$$

$$= 1.1 + 4.1 + 9.1 = 14$$

طريقة حساب كل من g_1, g_2, g_3 نعوض في $(*)$

$$g_1 = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) - \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x)$$

من الدالة التفرعية عندما تسعى x ل 1 بقيم أكبر فإن نهاية $g(x)$ تساوي 1

و ايضا عندما تسعى x ل 1 بقيم أصغر فإن النهاية $g(x)$ تساوي 0

أي أن $g_1 = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x) - \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x) = 1 - 0 = 1$

و بنفس الطريقة نحسب g_2 لتكون $g_2 = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}} g(x) - \lim_{\substack{< \\ x\to 2}} g(x) = 2 - 1 = 1$

ولكن لحساب g_3 فإننا نعوض ب $(@)$ كون 3 نهاية المجال أي أن

$$g_b = g(b) - g(b-0) = g(b) - \lim_{\substack{< \\ x\to b}} g(x) = g(3) - \lim_{\substack{< \\ x\to 3}} g(x) = 3 - 2 = 1$$

مبرهنة:

اذا كانت الدالة f مستمرة على $[a,b]$ و كانت $g(x)$ تعاني من عدد من نقاط الانقطاع من النوع الأول(مراجعة المحاضرة الأولى و الثانية) c_k حيث

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n < b$$

و كانت g' موجودة على المجالات المفتوحة

$$]a, c_1[,]c_1, c_2[, \dots\dots\ ,]c_{n-1}, c_n[,]c_n, b[$$

عندها يكون تكامل استيلجس موجودا و يعطى بالشكل:

$$\int_a^b f \quad dg = \int_a^{c_1} f \;\; g'dx + \int_{c_1}^{c_2} f \;\; g'dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f \;\; g'dx + f(a).\, g_a$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g_k + f(b).\, g_b$$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

جواب الاختبار من المحاضرة السابقة 20

بجمع 1+1 كون الفرق بين 0 و 1 هو 1 و الفرق بين 1 و 2 هو 1

و جمعهم ب2+2 ثم 3+3 ثم 4+4

يكون الجواب 20

الاختبار الثاني:

هنالك رجل لديه من الجوارب 53, 21 من الجوارب أزرق اللون , و 25 جوربا أسود اللون , و17 جوربا أحمر اللون.

فإذا كانت الكهرباء منقطعة و هو في ظلام دامس وهو لا يستطيع أن يميز أيا من هذه الجوارب.

ما عدد الجوارب التي يجب أن يأخذها لكي يضمن بنسبة 100% أنه سيحصل على زوج جوارب السوداء

☺☺☺☺

to improve our mathematics