نظري

◄دكتورة المادة: هدى شماط

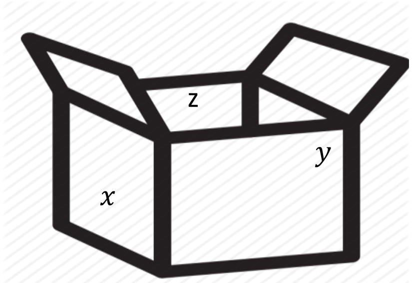
◄المحاضرة: السابعة عشر والأخيرة ◄عنوان المحاضرة: حل تمارين

تمرين 1 :

أوجد أبعاد صندوق مفتوح من الأعلى والذي حجمه أكبر ما يمكن إذا كانت مساقة الصندوق = 12

الحل

نشكل الدالة التي تعبر عن حجم متوازي مستطيلات و هي جداء أبعاده الثلاثة (الطول * العرض *الارتفاع)



$$f(x,y,z) = x.y.z$$

$$yx + 2yz + 2xz = 12$$

$$\varphi(x,y,z) = 12 - xy - 2yz - 2xz$$

نلجأ إلى القيم القصوى ومضاريب لاغرانج

لأنه إذا كانت لدينا دالة (من الفرض) : $f(x,y,z)$ و $\varphi(x,y,z) = 0$

فنشكل دالة جديدة من الشكل :

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) \qquad : \lambda > 0$$

نأخذ $F_x \ , F_y, \ F_z, F_\lambda$ ثم نوجد النقاط الحرجة ونستخدم $\Delta_2, \Delta_1, \Delta$

$$F_x(x,y,z) = 0$$

$$F_y(x,y,z) = 0$$

$$F_z(x,y,z) = 0$$

$$F_\lambda(x,y,z) = 0$$

بالعودة إلى المثال :

$$F(x,y,z) = x.y.z + \lambda(12 - xy - 2yz - 2xz)$$

نوجد المشتقات الجزئية :

$$F_x(x,y,z) = yz + \lambda(-y - 2z) = 0$$

$$F_y(x,y,z) = xz + \lambda(-x - 2z) = 0$$

$$F_z(x,y,z) = xy + \lambda(-2x - 2y) = 0$$

$$F_\lambda(x,y,z) = 12 - xy - 2yz - 2xz = 0$$

نضرب المعادلة الأولى بـ x و الثانية بـ y و الثالثة بـ z فينتج لدينا جملة المعادلات :

$$xyz - \lambda(xy + 2xz) = 0 \quad ...[1]$$

$$xyz - \lambda(xy + 2yz) = 0 \quad ...[2]$$

$$xyz - \lambda(2xz + 2yz) = 0 \quad ...[3]$$

لا تنسى أن x, y, z أبعاد لصندوق و بالتالي لن يكون أي منها صفراً و بالتالي لا نناقش حل المعادلة $z = 0$

بطرح [1] و [2] نجد أن :

$$\Rightarrow \lambda(-2xz + 2yz) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z\lambda(-x + y) = 0$$

$$x = y$$

بطرح [2] من [3] نجد أن :

$$-\lambda(-xy + 2xz) = 0$$

$$-\lambda x(-y + 2z) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2z \; ...(*)$$

و لما كان $x = y$ ينتج أن $x = 2z \; ....(**)$

نعوض $(**)\&(*)$ في المعادلة الأخيرة

$$12 - 4z^2 - 4z^2 - 4z^2 = 0$$

$$12z^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad z = \mp 1$$

$\Rightarrow (x,y,z) = (2,2,1)$ هي أبعاد التي تحقق الحجم أكبر ما يمكن

تمرين ٢ :

أوجد أبعاد متوازي المستطيلات الذي حجمه أكبر ما يمكن و جوانبه موازية للمحاور $oxyz$ و يمكن رسمه داخل مجسم القطع الناقص

الحل

الدالة التي تمثل حجم متوازي المستطيلات هي $f(x,y,z) = x.y.z$

بما أنه مرسوم داخل قطع ناقص فإن معادلة القطع الناقص في الفراغ هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ومنه
$$\emptyset(x,y,z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

نشكل الدالة :
$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\emptyset(x,y,z)$$

$$\Longrightarrow F(x,y,z,\lambda) = x.y.z + \lambda\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

نبدأ بالاشتقاق ونعدم المشتقات :

$$F_x(x,y,z,\lambda) = yz - \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \dots .(1)$$
$$F_y(x,y,z,\lambda) = xz - \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \dots .(2)$$
$$F_z(x,y,z,\lambda) = xy - \frac{2\lambda}{c^2}z = 0 \dots \dots (3)$$
$$F_\lambda(x,y,z,\lambda) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \dots .(4)$$

سنضرب المعادلة *(1)* بـ x و نضرب المعادلة *(2)* بـ y و نضرب المعادلة *(3)* بـ z :

$$xyz - \frac{2\lambda}{a^2}x^2 = 0 \dots .(1')$$
$$xyz - \frac{2\lambda}{b^2}y^2 = 0 \dots .(2')$$

$$xyz - \frac{2\lambda}{c^2}z^2 = 0 \dots\dots (3')$$

نطرح $(2')$ من $(1')$:

$$-\frac{2\lambda}{a^2}x^2 + \frac{2\lambda}{b^2}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda}{a^2}x^2 = \frac{2\lambda}{b^2}y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{a^2}{b^2}y^2} \dots . (*)$$

نطرح $(3')$ من $(2')$:

$$-\frac{2\lambda}{b^2}y^2 + \frac{2\lambda}{c^2}z^2 = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda}{b^2}y^2 = \frac{2\lambda}{c^2}z^2 \Rightarrow \boxed{z^2 = \frac{c^2}{b^2}y^2} \dots . . (**)$$

نعوض $(*)$ و $(**)$ في (4):

$$1 - \frac{\frac{a^2}{b^2}y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{\frac{c^2}{b^2}y^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{3y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{b}{\sqrt{3}}}$$

نرفض إشارة السالب لأن y تعبر عن طول في مستطيل ، نعوض في $(*)$و$(**)$:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

$$z^2 = \frac{c^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{c}{\sqrt{3}}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

تمرين ٣:

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x,y,z) = x3 + y3 + z3$ حيث النقطة (x,y,z)

تحقق المعادلة $x + y + z = 4$

الحل

نشكل الدالة :

$$f(x,y,z,\alpha)=x^3+y^3+z^3\longmapsto -\alpha(4-x-y-z)$$

$$f(x)=3x^2-\alpha=0 \qquad \dots 1$$

$$f(y)=3y^2-\alpha=0 \qquad \dots 2$$

$$f(z)=3z^2-\alpha=0 \qquad \dots 3$$

$$f(\alpha)=4-x-y-z=0 \qquad \dots 4$$

بطرح ٢ من ١ نجد :

$$3x^2-3y^2=0\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=\pm y$$

من ٢ و٣ نجد :

$$3y^2-3z^2=0\Rightarrow y^2=z^2\Rightarrow z=\pm y$$

إن النقاط الحرجة التي ستحقق إما $x=-y$ أو $x=y$ لنأخذ كل واحدة على حدى

$$x=y\begin{cases} z\\ -z\end{cases} \qquad x=-y\begin{cases} z\\ -z\end{cases}$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{1},\underbrace{(x,y,-z)}_{2},\underbrace{(x,-y,z)}_{3},\underbrace{(z,-y,-z)}_{4}$$

نعوض (١) في $f\alpha$: $4-3x=0\Rightarrow x=\frac{4}{3},y=\frac{4}{3},z=\frac{4}{3}\Rightarrow\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

نعوض (٢) في $f\alpha$: $4-x-x+x=0\Rightarrow x=4 \Rightarrow (4,4,-4)$

نعوض (٣) في $f\alpha$: $4-x-x+x=0\Rightarrow x=4 \Rightarrow (4,-4,4)$

نعوض (٤) في $f\alpha$: $4-x+x+x=0\Rightarrow x=-4 \Rightarrow (-4,4,4)$

ومنه أوجدنا أربع نقاط حرجة لنبين إن كانت قصوى أم لا لنأخذ :

$$f_{xx}=6x \quad ,f_{yy}=6y \quad ,f_{zz}=6z$$

والمشتقات المختلفة معدومة : f_{xy},f_{xz},f_{yz}

لنأخذ النقطة الأولى $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$:

$$\Delta_1 = f_{xx}\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = 8 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = > 0$$

ومنه النقطة صغرى نسبياً .

لنأخذ النقطة الثانية $(4,4,-4)$:

$$\Delta_1 = f_{xx}(4,4,-4) = 24 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = > 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = < 0$$

ومنه ليست قصوى .

لنأخذ النقطة الثالثة $(4,-4,4)$:

$$\Delta_1 = f_{xx}(4,-4,4) = 24 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24 \end{vmatrix} = < 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = < 0$$

ومنه ليست قصوى.

لنأخذ النقطة الأخيرة $(-4,4,4)$:

$$\Delta_1 = f_{xx}(-4,4,4) = -24 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} = < 0 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = < 0$$

ومنه ليست قصوى

أي أن النقطة الأولى $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ **صغرى نسبياً**

تمرين ٤ :

أوجد أقصر بُعد (مسافة) بين النقطة $A(2,1,-3)$ و المستوي الذي معادلته $2x+y-2z=4$

الحل

لنفرض أن $M(x,y,z)$ و بالتالي يمكن تقليل عدد المجاهيل بعزل y من معادلة المستوي و تعوضيها في إحداثيات النقطة, لتجد أن , $M(x,4+2z-2x,z)$ و الآن سنأخذ الدالة التي تشكل مربع البعد بين نقطة كيفية من المستوي و النقطة A :

$$f(x,y,z)=(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$$

$$f(x,z)=(x-2)^2+(3+2z-2x)^2+(z+3)^{2}$$

$$fx=2(x-2)-4(3+2z-2x)=0\ =10x-8z-16=0\ \dots.[1]$$

$$fz=4(3+2z-2x)+2(z+3)=0\ =10z-8x+18=0\ \dots.[2]$$

نقسم كلاً من [1] و [2] على 2 نجد أن:

$$5x-4z-8=0$$

$$-4x+5z+9=0$$

نضرب المعادلة الأولى ب *4* والمعادلة الثانية ب *5* نجد و نجمع:

$$9z+13=0\ \Rightarrow\ z=\frac{-13}{9}$$

نعوض بإحدى المعادلتين...

$$5x-4\left(\frac{-13}{9}\right)-8=0$$

$$5x+\frac{52}{9}-8=0\Rightarrow 5x+\frac{52}{9}-\frac{72}{9}=0\ \Rightarrow\ 5x=\frac{20}{9}\ \Rightarrow x=\frac{4}{9}$$

نُعوض بy

$$y=4-\frac{8}{9}-\frac{26}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\left(\mathbf{\frac{4}{9},\frac{2}{9},-\frac{-13}{9}}\right)$$

تمرين ٥ :

حدد النقاط القيم العظمى النسبية والصغرى النسبية للدالة : $f(x,y) = cos(x^2 + y^2)$

الحل

لنبحث أولاً عن النقاط الحرجة :

$$f_x(x,y) = -2x\, sin(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x = 0\,, x^2 + y^2 = \pi k$$

$$f_y(x,y) = -2y\, sin(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow y = 0\,, x^2 + y^2 = \pi k$$

حيث $k \in Z$ ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ f وباقي النقاط الحرجة $x^2 + y^2 = \pi k$

$$f_{xx}(x,y) = -2\, sin(x^2 + y^2) - 4x^2\, cos(x^2 + y^2)$$

$$f_{yy}(x,y) = -2\, sin(x^2 + y^2) - 4y^2\, cos(x^2 + y^2)$$

$$f_{xy}(x,y) = -4xy\, cos(x^2 + y^2) = f_{yx}$$

$$\Delta_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

لكن : $-1 \le cos(x^2 + y^2) \le 1 = f(0,0)$ ومنه $(0,0)$ نقطة عظمى مطلقة .

وعندما : $x^2 + y^2 = \pi k$ $\quad -1 \le cos(\pi k) \le 1 = f(0,0)$

هنا إذا كان k فردي يكون قيمة صغرى مطلقة (لأن الدالة تبلغ حدها الأدنى -1)

وإذا كان k زوجي يكون قيمة عظمى مطلقة (لأن الدالة تبلغ حدها الأعلى 1) .

بذلك تكون قد نكون أنهينا المحاضرة الأخيرة آملين أن نكون قد قدمنا لكم مادة مفيدة و راجين الله تعالى أن يوفقكم في جميع المواد و أن يوفقنا في تطوير كل ما نقدمه لكم في سبيل تطوير رياضياتنا

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب

تنسيق: ولاء الأخضر♥