◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: تعميم قابلية الاشتقاق و فريشيه

سنتعرف في هذه المحاضرة على :

١ـ مشتق فريشيه (حالة خاصة : الدوال لمتحولين)

٢ـ تعميم قابلية الاشتقاق و تعميم مشتق فريشيه

٣ـ مبرهنات

٤ـ خواص الدوال القابلة للاشتقاق وتمارين لتدعيم ما سبق من أفكار.

مشتق فريشيه

ندعو الدالة الآتية:

$$d\,f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(h,k) \to d_{(a,b)}f(h,k) = h \underbrace{f_x}_{x \text{ المشتق الأول عند }} (a,b) + k f_y(a,b)$$

حيث: D مفتوحة و $c = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ب**"مشتق فريشيه"**.

تدريب:

ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 + 2xy\sin x$$

أوجد: $d_c f(x-c)$ حيث $c(0,-2)$.

الحل

$$x - c = (x,y) - (0,-2) = (\underbrace{x}_{h}, \underbrace{y+2}_{k})$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2y\sin x + 2xy\cos x$$

$$\Rightarrow f_x(0,-2) = 3(0) + 4(-2)^2 + 2(-2)\sin 0 + 2(0)(-2)\cos 0$$

$$\Rightarrow f_x(0,-2) = 4y^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$f_y(x,y) = 8xy + 2x \sin x$$

$$\Rightarrow f_y(0,-2) = 8(0)(-2) + 2(0)\sin 0 = 0$$

ومنه:

المرتبة الأولى ب f_x والمرتبة الثانية ب f_y أي:

$$d_{(0,-2)}f\left(\underbrace{x}_{\text{المشتق الأول على } f_x}, \underbrace{y+2}_{\text{المشتق الثاني على } f_y}\right) = 16x + 0(y+2) = 16x$$

تعميم قابلية الاشتقاق: من أجل $n \geq 3$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ولتكن $c \in D^\circ$ أي توجد كرة مفتوحة مركزها c محتواة في D ، إذا وجدت:

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

بحيث تحقق: $||h|| < \delta$

فهنالك: $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$

تحقق أن:

$$f(c+h) - f(c) = A_1h_1 + A_2h_2 + \cdots + A_nh_n + \mu||h|| = \sum_{i=1}^{n} A_ih_i + \mu(h)||h||$$

بحيث: $\boldsymbol{lim_{||h||\to 0}\ \mu = 0}$ عندئذٍ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة c.

لنوجد قيم A في العلاقة السابقة:

لإيجاد A_1 نفرض أن: $h_1 \neq 0$

$$h_2 = h_3 = h_4 = \cdots = h_n = 0$$

عندئذٍ:

$$f(c+h)-f(c)=A_1h_1+\mu\underbrace{\sqrt{h_1^2}}_{||h_1||}$$

$$f(c+h)-f(c)=A_1h_1\pm\mu\,h$$

نقسم الطرفين على h_1 :

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h_1}=A_1\pm\mu$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $h_1\to 0$:

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h_1}=A_1+\underbrace{\lim_{h_1\to 0}\mu}_{=0}$$

$$\Rightarrow A_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)=f_{x_1}(c)$$

وبنفس الطريقة نجد A_2 :

$$A_2=\frac{\partial f}{\partial x_2}(c)=f_{x_2}(c)$$

وبالتالي يكون القانون:

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n}h_if_{x_i}(c)+\mu||h||\ \dots(*)$$

بشرط أن:

$$lim_{||h||\to 0}\,\mu=0$$

تعميم مشتق فريشيه:

$$d_cf: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\longmapsto d_cf(h)=h\,f_{x_1}(c)+h_2f(c)\dots+h_nf_{x_n}(c)$$

أي أن:

$$h \longmapsto d_c f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i f_{x_i}(c)$$

ندعو الدالة الخطية هذه بمشتق فريشية في النقطة c .

ولكي يتحقق الانسجام بين الرموز القديمة والرموز الجديدة لنعرف الدالة:

$$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$h \to d_{x_i}(h) = \underbrace{h_i}_{\text{صورة}}$$

$$x \to d_{x_i}(x) = x_i$$

وهكذا...

نبدل في صيغة فريشيه $(*)$ فيكون :

$$d_c f(h) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(c) d_{x_i}(h)$$

$$d_c f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(c) d_{x_i}$$

مثال: أوجد مشتق فريشيه $d_c f(X - c)$ للدالة:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$X = (x, y, z) \to e^{-(x+y+z)}$$

$$c(0,0,0)$$

الحل

نلاحظ أن:

$$X - c = (x, y, z) - (0,0,0) = (x, y, z)$$

ومن ثم نقوم بحساب: $d_{(0,0,0)} f(x, y, z)$

نوجد قيم المشتقات الجزئية عند c

$$f_x(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}$$

$$f_y(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}$$

$$f_z(x,y,z) = -e^{-(x+y+z)}$$

ومنه:

$$f_x(0,0,0) = f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = -1$$

نعوض في صيغة فريشيه ومنه:

$$\boxed{d_c f(X-c) = d_c f(x,y,z) = -x-y-z}$$

$$d_{(0,0,0)} f(x,y,z) = -x-y-z$$

نأخذ المرتبة الأولى مضروبة ب f_x

نأخذ المرتبة الثانية مضروبة ب f_y وباعتبار $f_x, f_y, f_z = -1$

نأخذ المرتبة الثالثة مضروبة ب f_z

<u>طريقة الحصول على $d_{(0,0,0)} f(x,y,z) = -x-y-z$:</u>

أولاً نأخذ المرتبة الأولى (x) ونضربها ب f_x والتي هي (-1) ومنه $-x$

ثانياً نأخذ المرتبة الثانية (y) ونضربها ب f_y والتي هي (-1) ومنه $-y$

ثالثاً نأخذ المرتبة الثالثة (z) ونضربها ب f_z والتي هي (-1) ومنه $-z$

<u>مبرهنة :</u>

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$c \in D^0$ و f قابلة للاشتقاق في c عندئذٍ يوجد عددان موجبان k , δ بحيث إذا كان:

$$\|x-c\| < \delta$$

فإن:

$$|f(x) - f(c)| < k\|x-c\|$$

الإثبات :

بما أن f قابلة للاشتقاق في النقطة $c = (c_1, c_2 \dots, c_n)$ عندئذٍ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث تحقق أن $\|h\| < \delta_1$ فهنالك $A = (A_1, A_2, \dots \dots A_n) \in \mathbb{R}^n$
وتحقق:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu \|h\|$$

بشرط أن:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \mu = 0$$

والآن لنبحث عن k لنأخذ بالمقدار:

$$|f(c+h) - f(c)| = \left| \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu \|h\| \right|$$

$$\underbrace{\leq}_{|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|} \left| \sum_{i=1}^{n} A_i h_i \right| + |\mu| \, \|h\| \underbrace{\leq}_{|\sum c_n| \leq \sum |c_n|} \sum_{i=1}^{n} |A_i||h_i| + |\mu| \, \|h\|$$

مع الانتباه أن: $|h_i| < \|h\|$ حيث $i = 1, \dots, n$
ومنه:

$$|f(c+h) - f(c)| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| \|h\| + |\mu| \, \|h\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + |\mu| \right) \|h\|$$

لكن الدالة قابلة للاشتقاق أي أن:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \mu = 0$$

فيكون حسب تعريف النهاية:

$\forall \varepsilon > 0$ (سنختار $\varepsilon = 1$) فإنه:

$$\exists \delta_2 > 0 \,, 0 < \|h\| < \delta_2 \Longrightarrow |\mu - 0| < \varepsilon = 1$$

ومنه:

$$\Longrightarrow |f(c+h) - f(c)| < \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1 \right) \|h\| \dots (*)$$

بالتالي: $\exists \delta = min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \|h\| < \delta$

نسمي $c + h = x$ ولنضع $\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1 = k$ ونعوض بالعلاقة $(*)$:

$$|f(x)-f(c)| < k \; \| \underbrace{x-c}_{c+h=x \Rightarrow h=x-c} \|$$

وهو المطلوب...☺

مبرهنة:

إذا كانت $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و لتكن $c \in D^{\circ}$ فإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c عندئذٍ تكون الدالة f مستمرة في c .

البرهان:

بما أن f قابلة للاشتقاق في c فحسب المبرهنة السابقة يوجد عددان $\delta_1 > 0$ و $k > 0$ بحيث تحقق $\|x-c\| < \delta_1$ فإن:

$$|f(x)-f(c)| < k\|x-c\| < k\delta$$

وبالتالي :

$$\exists \delta_2 = min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{k}\right)$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(c)| < k\delta_1 < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

أي f مستمرة في c .

ملاحظة :

f قابلة للاشتقاق $\Leftarrow$ f مستمرة

f غير مستمرة $\Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق

مثال: لتكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ; (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x}{y} & ; (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

أثبت أن f غير قابلة للاشتقاق في $(0,0)$.

الحل

ملاحظة : "لإثبات أنها غير قابلة للاشتقاق يكفي أن نثبت أنها غير مستمرة ".

الطريقة الأولى (من التعريف):

لنثبت أن f غير مستمرة في $(0,0)$:

حتى تكون مستمرة عند المبدأ يجب أن يتحقق أن:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta \,, \| (x,y) - (0,0) \| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{x}{y} - 0 \right| < \varepsilon}_{|f(x,y) - f(0,0)| < \delta}$$

لنأخذ $y = \frac{\varepsilon}{2}$ و $x = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$||(x,y) - (0,0)|| = ||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \delta$$

إلا أن:

$$|\boldsymbol{f(x,y) - f(0,0)}| = \left| \frac{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}}}{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}}} - \mathbf{0} \right| = \mathbf{1}$$

لنختار قيمة ل ε ولتكن $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ومنه:

$$|\boldsymbol{f(x,y) - f(0,0)}| = \mathbf{1} \not< \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

فالدالة المعطاة ليست مستمرة عند $(0,0)$ و بالتالي لن تكون قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$ ...☺

الطريقة الثانية (من النهاية):

من أجل $x = y$ و $c(0,0)$ نقطة حدية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1 \neq f(0,0) = 0$$

f غير مستمرة في $(0,0)$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$ ...☺

مبرهنة:

ليكن $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ و $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{D}^{\circ}$ وكانت جميع المشتقات الجزئية موجودة في جوار ما للنقطة $\boldsymbol{c}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_2}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_n}$$

ومستمرة في $\boldsymbol{c}$ عندئذٍ تكون الدالة $\boldsymbol{f}$ قابلة للاشتقاق عند $\boldsymbol{c}$.

نتيجة: إن وجود المشتقات الجزئية الأولى واستمرارها على كامل المسافة D تقتضي قابلية الاشتقاق لهذه الدالة على كامل المسافة D وبالتالي فإن f مستمرة في جميع نقاط هذه المساحة D.

خواص الدوال القابلة للاشتقاق:

إذا كان لدينا دالتين:

$$f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$c \in D^{\circ}$ و f, g قابلتان للاشتقاق.

١- الخاصة الخطية:

إن الدالة $\alpha f + \beta g$ تكون قابلة للاشتقاق في c حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

٢- $$d_c f(\alpha f + \beta g) = \alpha d_c f + \beta d_c g$$

٣- f, g قابلتان للاشتقاق:

$$d_c(f.g) = (d_c f).g + (d_c g).f$$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_رهف النقشي_سارة شهاب