نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: العاشرة عنوان المحاضرة: مبرهنة النهاية المركزية

بسم الله الرحمن الرحيم

مبرهنة النهاية المركزية

إذا كان $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, \ldots$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع نفسه بتوقع (μ) وتباين (σ^2) محدودين و $(\sigma^2 \neq 0)$ فإن توزيع المتغير العشوائي :

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

يسعى إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ حيث $\overline{X_n} := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

أي التوزيع Z_n يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي :

$$Z_n \underbrace{\approx}_{\text{يتوزع تقريبا}} N(0,1)$$

نتائج من المبرهنة :

١- $\overline{X_n} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

٢- $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

ملاحظة وشرط للمبرهنة :

يكون التقريب جيدا إذا كان $(n \geq 30)$.

مثال:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n, \ldots$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة ولكل منها التوزيع البواسوني بوسيط $(\lambda = 2)$ فإذا كان $Y_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ ، أوجد $P(190 < Y_{100} < 210)$.

الحل

من الفرض لدينا X_i يتبع التوزيع البواسوني بوسيط $(\lambda = 2)$

$$X_i \sim Poiss(\lambda = 2) \Leftrightarrow f_{X_i}(x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} \quad ; x = 0,1, \dots$$

ولدينا

$$E(X_i) = E(X) = \mu = \lambda$$
$$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

وبما أن $30 \leq n = 100$، **فيمكن تطبيق مبرهنة النهاية المركزية** حيث :

$$Y_{100} \approx N(n\mu, n\sigma^2)$$
$$Y_{100} \approx N(100\lambda, 100\lambda)$$
$$\Longrightarrow Y_{100} \approx N(200,200)$$

وبالتالي :

$$P(190 < Y_{100} < 210) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} P\left(\frac{190-200}{\sqrt{200}} < \underbrace{\frac{Y_{100} - \mu_{Y_{100}}}{\sigma_{Y_{100}}}}_{=Z\sim N(0,1)} < \frac{210-200}{\sqrt{200}}\right)$$

$$\Longrightarrow P(190 < Y_{100} < 210) = P(-0.707 < Z < 0.707)$$
$$\Longrightarrow P(190 < Y_{100} < 210) = \phi_Z(0.707) - \phi_Z(-0.707)$$
$$\Longrightarrow P(190 < Y_{100} < 210) = 2\phi_Z(0.707) - 1$$
$$\Longrightarrow P(190 < Y_{100} < 210) = 2(0.76) - 1 = 0.52$$

تمرين :

إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين طبيعيين مستقلين وكان :

$X_1 \sim N(3,16)$

$X_2 \sim N(5,9)$

فاحسب : ١- $P(X_1 < X_2)$

٢- $P(3X_1 - 2X_2 > 1)$

الحل

قانونا لدينا إذا كان $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ فإن $a_1X_1 + a_2X_2 \sim N(\sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2)$

وبالتالي …

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$X_1 - X_2 \sim N(3 - 5, 16 + 9)$$

$$\Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(-2{,}25)$$
$$3X_1 - 2X_2 \sim N(3\mu_1 - 2\mu_2, 9\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2)$$
$$3X_1 - 2X_2 \sim N\big((3)(3) - 2(5), 9(16) + 4(9)\big)$$
$$\Rightarrow 3X_1 - 2X_2 \sim N(-1{,}180)$$

-١

$$P(X_1 < X_2) = P\left(\underbrace{X_1 - X_2}_{\sim N(-3,25)} < 0\right)$$
$$\Rightarrow P(X_1 < X_2) \underset{\text{بالمعايرة}}{=} P\left(\underbrace{\frac{(X_1 - X_2) - \mu_{X_1 - X_2}}{\sigma_{X_1 - X_2}}}_{=Z \sim N(0,1)} < \frac{0 - (-2)}{5}\right)$$
$$\Rightarrow P(X_1 < X_2) = P\left(Z < \frac{3}{5}\right)$$
$$\Rightarrow P(X_1 < X_2) = \phi_Z(0.4) = 0.6554$$

-٢

$$P(3X_1 - 2X_2 > 1) = 1 - P\left(\underbrace{3X_1 - 2X_2}_{\sim N(-1,180)} \leq 1\right)$$
$$\Rightarrow P(3X_1 - 2X_2 > 1) \underset{\text{بالمعايرة}}{=} 1 - P\left(\underbrace{\frac{(3X_1 - 2X_2) - \mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{1 - (-1)}{\sqrt{180}}\right)$$
$$\Rightarrow P(3X_1 - 2X_2 > 1) = 1 - P(Z \leq 0.15)$$
$$\Rightarrow P(3X_1 - 2X_2 > 1) = 1 - \phi_Z(0.15)$$
$$\Rightarrow P(3X_1 - 2X_2 > 1) = 1 - 0.5596 = 0.4404$$

تمرين :

في إحدى ألعاب الحظ توضع ست مغلفات متماثلة في الشكل ،ويوجد داخل كل منها بطاقة تدل على عدد الليرات التي يربحها اللاعب عند سحبه للمغلف ،فإذا كان كل من المغلفين الأول والثاني يحوي بطاقة تحمل الرقم (15) ويحوي المغلف الثالث بطاقة تحمل الرقم (10) ويحوي المغلف الرابع بطاقة تحمل الرقم (20) ويحوي كل من المغلفين الخامس والسادس بطاقة تحمل الرقم صفر ،**والمطلوب** :

١- إذا قام شخص ب (36) عملية سحب (سحب مع الإعادة) فما هو احتمال أن يجمع مبلغا يزيد على

(350) ليرة .

٢- ما هو أصغر مبلغ يمكن أن يحصل عليه باحتمال (95%) .

الحل

بفرض أن (X) متغير عشوائي يدل على عدد الليرات التي يربحها اللاعب عند سحبه للمغلف فيكون له جدول التوزيع التالي :

X	0	10	15	20	مج
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

وبالتالي فإن :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i f_X(x_i)$$

$$\Rightarrow E(X)=(x_1)f_X(x_1)+x_2 f_X(x_2)+x_3 f_X(x_3)+x_4 f_X(x_4)$$

$$\Rightarrow E(X)=(0)\left(\frac{2}{6}\right)+(10)\left(\frac{1}{6}\right)+(15)\left(\frac{2}{6}\right)+(20)\left(\frac{1}{6}\right)=10$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2\, f_X(x_i)=\frac{950}{6}$$

$$\sigma_X^2=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\frac{350}{6}$$

ولنفرض $\left(T=\sum_{i=1}^{36} X_i\right)$ وهو متغير عشوائي يدل على مجموع ما يربحه اللاعب عندما يقوم ب (36) عملية سحب للمغلفات وعدد هذه السحوبات ويساوي $(n=36\geq 30)$ وبالتالي يمكن تطبيق مبرهنة النهاية المركزية حيث أن :

$$T=\sum_{i=1}^{36} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\Rightarrow T\approx N\left((36)(10),(36)\left(\frac{350}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T\approx N(360{,}2100)$$

١-

$$P(T>350)=1-P(T\leq 350)$$

$$\Rightarrow P(T>350) \underbrace{=}_{\text{بالمعايرة}} 1-P\left(\underbrace{\frac{T-\mu_T}{\sigma_T}}_{=Z\sim N(0,1)} \le \frac{350-360}{\sqrt{2100}}\right)$$

$$\Rightarrow P(T>350)=1-P(Z\le -0.22)$$

$$\Rightarrow P(T>350)=1-\phi_Z(-0.22)$$

$$\Rightarrow P(T>350)=\phi_Z(0.22)=0.5871$$

٢-نفرض أن (t) هو أصغر مبلغ يمكن أن يحصل عليه اللاعب باحتمال (95%) أي أن :

$$P(T\ge t)=0.95$$

$$\Rightarrow 1-P(T<t)=0.95$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمعايرة}} 1-P\left(\underbrace{\frac{T-\mu_T}{\sigma_T}}_{=Z\sim N(0,1)} < \frac{t-360}{\sqrt{2100}}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{t-360}{\sqrt{2100}}\right)=0.95$$

$$\Rightarrow 1-\phi_Z\left(\frac{t-360}{\sqrt{2100}}\right)=\phi(1.645)$$

$$\Rightarrow \phi_Z\left(-\frac{t-360}{\sqrt{2100}}\right)=\phi(1.645)$$

بالمطابقة نجد أن :

$$-\frac{t-360}{\sqrt{2100}}=1.645$$

$$\Rightarrow t=284.6$$

3	...	0.4	0.5
⋮	...	⋮	⋮
1.6	...	$\phi(1.64)$	$\phi(1.65)$

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة^نهى حبشية^نور مهرة