نظري

◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: العاشرة   عنوان المحاضرة: الاستمرار في الفضاءات المترية

المحتوى العلمي :

- ❖ كثافة مجموعة .
- ❖ تعاريف (المسافة بين مجموعتين) (المسافة بين عدد ومجموعة) (وقطر مجموعة) وتمارين .
- ❖ الاستمرار في الفضاءات المترية وأمثلة عنها .

سنكمل أولاً في برهان التمهيدية في المحاضرة السابقة :

٣- أثبت أن $\overline{A} = A \cup A^{`}$

لدينا من الطلب الأول : $A^{`} \subseteq \overline{A}$

ولدينا أيضاً $A^{`} \subseteq \overline{A}$ لأن كل نقطة حديّة هي نقطة ملاصقة وبالتالي

❖ $A \cup A' \subseteq \overline{A}$ ... (1)

إذا كانت $x \in \overline{A}$ أي x ملاصقة لـ A :

إذا كانت $x \in A$ فإن $x \in A \cup A^{`}$

إذا كانت $x \notin A$ فإن x ملاصقة لـ $A \Leftrightarrow$

❖ $\forall\ \varepsilon > 0 ; N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

ولأن $x \notin A$ نجد أن $A = A \backslash \{x\}$

ومنه :

$$\forall\ \varepsilon > 0 ; N(x,\varepsilon) \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$$

أي أن x حديّة لـ A وبالتالي $x \in A'$ ومنه $x \in A \cup A'$

$\Leftarrow \overline{A} \subseteq A \cup A'$ (2)..

$\Leftarrow$ من (1) و (2) نجد $\overline{A} = A \cup A'$

٤- أثبت أن $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ مغلقة .

❖ " $\Leftarrow$ " ليكن $\overline{A} = A$ حسب الطلب ٢) أن $\overline{A}$ مغلقة ومنه A مغلقة .

❖ " $\Rightarrow$ " لتكن Aمغلقة فإن $\overline{A}$ هي إحدى المجموعات التي ناتج تقاطعها تساوي A و $A \subseteq A$لذلك

$\overline{A} \subseteq A$ ولدينا من ١) $\Leftarrow A \subseteq \overline{A}$

فإن $\Leftarrow \overline{A} = A$

ه- أثبت أن $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

من (2) لدينا $\overline{A}$ مغلقة ، ومن (4) نجد أن $\overline{A} = \overline{(\overline{A})}$

تعريف كثافة مجموعة : نقول عن مجموعة $A \subseteq x$ أنها في فضاء متري أنها كثيفة إذا كان $\overline{A} = X$.

مثال: Q كثيفة في $(R,|.|)$ لأن $\overline{Q} = R$

" يُطلب الإثبات وسيتم برهانها لاحقاً "

تعاريف :

المسافة بين مجموعتين :

$$d(A,B) = inf\{\, d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

البعد بين a ومجموعة B:

إذا كان $A = \{a\}$

$$d(\{a\},B) = inf\{\, d(a,y) : , y \in B\}$$

$$d(a,B) = inf\ d(a,y) : y \in B$$

قطر المجموعة :

$$\delta(A) = sup \ \ \{\, d(x,y) : x, y \in A\}$$

قد يكون $\delta(A) = +\infty$ " يجب أن تكون A غير محدودة " .

مثال : لتكن $A = N\big((0,0),1\big)$ في $(\mathbb{R}^2, d)$ عندئذٍ :

$\delta(A) = 2$ وهو أبعد مسافة بين نقطتين .

تمارين ((وظيفة)) :

ليكن (X,d) فضاء متري :

١. $x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0$

٢. $x \subseteq B \Leftarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

٣. $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A \cup B) + \delta(B)$

٤. $\delta(A) = \delta(\overline{A})$

٥. $(A\ ) = A \subseteq A$

الاستمرار في الفضاءات المترية :

لتكن $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$

نقول أن f مستمراً في $x_0 \in X$ إذا وُجد لكل جوار V لـ $f(x_0)$ جواراً U لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$

ويكون f مستمراً إذا كان مستمراً عند كل نقطة من X .

مثال ١) : ليكن $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$

$$\forall x \in X \,;\, f(x) = b \in Y$$

أثبت أناكتب المعادلة هنا f مستمر

الحل

لتكن $x_0 \in X$ ليكن V جواراً لـ$f(x_0) = b$ عندئذٍ يوجد جوار U لـ x_0 هو $U = X$ ولدينا $f(U) = f(x) = \{b\}$ ولدينا $\{b\} \subseteq V$

فإن $f(U) \subseteq V$ إذاً f مستمر في x_0 ، وبالتالي f مستمر على X.

مثال ٢ : ((للاطلاع)): ليكن $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \,;\, f(x) = (x,x)$$

أثبت أن fمستمراً على $\mathbb{R}$.

الحل

لتكن V جواراً ل $f(x_\circ) = (x_\circ, x_\circ)$

ونريد إيجاد جواراً U لـ $x_\circ$ بحيث $f(U) \subseteq V$

بما أن Vجواراً لـ $(x_\circ, x_\circ)$ فإن $(x_\circ, x_\circ) \in w \subseteq V$

حيث w مجموعة مفتوحة ومنه :

$$\exists\, \varepsilon > 0 ; N\big((x_\circ, x_\circ), \varepsilon\big) \subseteq W \subseteq V$$

$$N\big((x_\circ, x_\circ), \varepsilon\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_\circ, x_\circ)) < \varepsilon\}$$

$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_\circ)^2 + (y - x_\circ)^2} < \varepsilon\right\}$$

ولدينا الجوار $U = N\left(x_0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ وفي هذه الحالة سنجد أن $f(U) \subseteq V$

وليكن $y = f(x) \in f(u)$ حيث $x \in U$

$$\Rightarrow x \in N\left(x, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - x_\circ| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \left\{x_0 \in \mathbb{R} : \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2}} < x - x_\circ < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \left]\, x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\, ,\, x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\, \right[$$

$$\Rightarrow |x - x_\circ| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (x - x_\circ)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \Rightarrow 2(x - x_\circ)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow (x - x_\circ)^2 + (x - x_\circ)^2 < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \sqrt{(x - x_\circ)^2 + (x - x_\circ)^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d\big((x, x), (x_\circ, x_\circ)\big) < \varepsilon \quad \Rightarrow d\big(f(x), f(x_\circ)\big) < \varepsilon$$

$$f(x) \in N\big((x_\circ, x_\circ), \varepsilon\big)$$

$$\Rightarrow f(U) \subseteq V$$

$\Leftarrow f$ مستمر في x_0 فإن f مستمر على $\mathbb{R}$.

مثال ٣) : ليكن $f : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$

ما معنى أن f مستمر في $x_0 \in \mathbb{R}$

الحل

يعني أنه: أ- إذا كان V جوارا لـ $f(x_0)$ فإنه يوجد U جوارا لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$ ، لنأخذ $V = N(f(x_0), \varepsilon)$ جوارا لـ $f(x_0)$

$$=]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

إذا يوجد U جوارا لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$

$$\Rightarrow f(U) \subseteq]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

عندئذ توجد $w \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة بحيث $x \in w \subseteq U$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 ; N(x_0, \delta) \subseteq w \subseteq U$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 ;]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq w \subseteq U$$

$$\Rightarrow f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subseteq f(w) \subseteq f(U) \subseteq V$$

$$=]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

$$\Rightarrow f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subseteq]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)[$$

إذا من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا $\delta > 0$ بحيث إذا كان :

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ب- وبالعكس : إذا كان f مستمرا في x_0 بلغة ε و δ فهو مستمر في x_0 ، ليكن V جوار ما لـ $f(x_0)$ ويجب إيجاد جوار U لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$ ، بما أن V جوار لـ $f(x_0)$ $\Leftarrow$ توجد w مجموعة مفتوحة بحيث $f(x_0) \in w \subseteq V$

وبالتالي توجد $\varepsilon > 0$ بحيث $N(f(x_0), \varepsilon) \subseteq w \subseteq V$

إذا حسب تعريف الاستمرار بلغة ε و δ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \big(f(x) - f(x_0)\big) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in \,]\, x_0 - \delta , x_0 + \delta [$$

$$\Rightarrow f(x) \in \,]\, f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon [$$

$$\Rightarrow x \in N(x_0 , \delta) \Rightarrow f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon)$$

$$\Rightarrow f\big(N(x_0 , \delta)\big) \subseteq N(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$$

نأخذ $U = N(x_0 , \delta)$ ونجد أن $f(U) \subseteq V$.

انتهت المحاضرة

قاوم ما تكره.. لتصل إلى ماتُحب..W

إعداد: ناريمان جلو * آية اليافي * هالة مصطفى

تنسيق: ولاء الأخضر ♥