◄ دكتورة المادة: ملك مارديني

نظري

◄المحاضرة: الثانية عشر عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الجزئية

المحتوى العلمي :

١ـ تتمة منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية
٢ـ المغلف
٣ـ الحل الشاذ للمغلف
٤ـ طريقة ايجاد الحل الشاذ
٥ـ مسألة القيم الابتدائية والحدية

لنكمل اصدقائي افكار المعادلات التفاضلية الجزئية ....

الوسطاء دوال اختيار :

A- اذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالة اختيارية واحدة تتعلق بدالة معلومة من الشكل :
$F(x,y,z), g\big(u(x,y,z)\big) = 0$ حيث $z = z(x,y)$ و g دالة اختيارية و $F\ ,u$ دالتين معلومتين نشتق بالنسبة ل x ونشتق بالنسبة ل y ونحذف الدالة من المعادلات الناتجة

مثال:

أوجد م.ت.ج من المعادلة الجبرية : $x^2 + y^2 + z^2 = g(2x + y)$

الحل:

نلاحظ أن الدالة $u = (2x + y)$ ومنه نشتق المعادلة بالنسبة ل x

$$2x + 2zp = 2g' \to x + zp = g'$$

"طريقة الاشتقاق" $(z^2)' = 2z(z)'_x = 2zp$

$$(g(u))'_x = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du}.\frac{du}{dx} = 2g'$$

بالاشتقاق بالنسبة ل y نجد : $2y + 2zq = g'$

$(z^2)'_y = 2z(z)'_y = 2z$ "طريقة الاشتقاق"

$$(g(u))'_y = \frac{dg}{dy} = \frac{dg}{du}.\frac{du}{dy} = g'$$

من العلاقتين الناتجتين عن الاشتقاق بالنسبة ل $(x\&\&y)$ نجد:

$$x + zp = 2y + 2zq \to (2y - x) + z(2q - p) = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة.......

B- اذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالتين اختيارتين كلاهما يتعلق بدالة معلومة من الشكل :

$Z = f[u(x,y,z)] + g[v(x,y,z)]$ نشتق بالنسبة ل x مرتين ونحذف الدالتين $g\ ,f$ ونحصل على معادلة تفاضلية جزئية

مثال:

أوجد المعادلة التفاضلية الجزئية حيث العلاقة الجبرية هي : $z = F(x + 2y) + g(x - 2y)$

الحل :

لدينا $u(x,y) = x + 2y\ : F = F(u)\&\&v(x,y) = x - 2y : g = g(v)$

نشتق بالنسبة ل x حيث $z = z(F,g)$ ومنه:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$ وكون F تابعة ل u والدالة g تابعة ل v فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{du}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}.\frac{\partial v}{\partial x} \to p = F'.1 + g'.1 = F' + g'$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة ل x ومنه:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \to r = p' = F" + g" \quad \dots\dots\dots (\#)$$

نشتق المعادلة الأصلية بالنسبة ل y ومنه:

$$q = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{dF}{du}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dg}{dv}.\frac{\partial v}{\partial y} \to q = F'c - g'c$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة ل y ومنه:

$$t = \frac{\partial F'}{\partial y} + \frac{\partial g'}{\partial y} = \frac{dF'}{du}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dg'}{dv}.\frac{\partial v}{\partial y} \to t = c^2F + c^2g = c^2[F"+g"]$$

من (#) نجد $F''+g''=r$ ومنه $t=rc^2$ وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.....

C- اذا كانت العلاقة الجبرية تحوي على دالة اختيارية تتعلق بدالتين معلومتين من الشكل :
$F[u(x,y,z),v(x,y,z)]$ حيث F دالة اختيارية و $u\,,v$ دالتين معلومتين
نشتق بالنسبة ل x ونشتق بالنسبة ل y ونحذف الدالة ونحصل على معادلة تفاضلية جزئية من الشكل $P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R$ حيث $P\,,Q\,,R$ دالة معلومة تسمى معادلة لاغرانج

مثال:

اوجد المعادلة التفاضلية الجزئية من العلاقة الجبرية : $F(x^2+y^2+z)=0\,....\$$
حيث $u=x^2+y^2 \quad , \quad v=z$

الحل:

نشتق بالنسبة ل x $\quad F(u,v)=0$

$$\frac{dF}{dx}=0\Rightarrow\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dx}=0\Rightarrow 2x\frac{dF}{du}+p\frac{dF}{dv}=0\,...\,@$$

نشتق بالنسبة ل y

$$\frac{dF}{dy}=0\Rightarrow\frac{dF}{dy}=\frac{dF}{du}\frac{du}{dy}+\frac{dF}{dv}\frac{dv}{dy}=0\Rightarrow 2y\frac{dF}{du}+q\frac{dF}{dv}=0\,....\#$$

وبفرض ان $M=\frac{dF}{dv}$ $\quad N=\frac{dF}{du}$ نجد من@ , \$

$$2yN+qM=0 \quad , \quad 2xN+pM=0$$

الشرط اللازم والكافي لحل الجملة هو ان يكون محدد الامثال يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix}2x & p\\ 2y & q\end{vmatrix}=0\Rightarrow\ 2xq-2yp=0$$

وهي المعادلة التفاضلية الجزئية المطلوبة ...

المغلف:

هو ذلك المنحني الذي يمس في كل نقطة من نقاطه أحد السطوح التكاملية .

الحل الشاذ: لتكن المعادلة $F(x,y,z,C_1,C_2)$ هي الحل التام للمعادلة
(١) .... $F(x,y,z,p,q)=0$ عندئذ إذا كان هناك مغلفاً لهذه السطوح معادلته تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية رقم (١) عندها نسمي المغلق إن وجد بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية الجزئية رقم (١) ..

طريقة إيجاد المغلف نتبع الخطوات التالية:

١) نشتق الحل التام بالنسبة للثوابت.
٢) نقوم بحذف الثوابت من العلاقات الناتجة ومن الحل التام.
٣) نسمي السطوح الناتجة التي تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية بالحل الشاذ لهذه المعادلة.

مثال على ذلك:

أوجد المغلفات(الحلول الشاذة) ان وجدت للمعادلة التفاضلية التالية:

$$z = px + qy - p^2 - q^2 \dots \dots \dots (I)$$

حيث الحل التام لهذه المعادلة هو : $z = ax + by - a^2 - b^2$

الحل:

نلاحظ وجود الثابتين a, b في الحل العام والآن لنطبق الخطوات السابقة:

١) نشتق الحل التام بالنسبة ل a, b :أولاً بالنسبة ل a :

$$0 = x - 2a \to a = \frac{x}{2}$$

نشتق بالنسبة ل b ومنه : $0 = y - 2b \to b = \frac{y}{2}$

٢) نعوض قيمة a, b في الحل التام ومنه (بعد الاختزال):

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \dots \dots \dots \dots \dots (\#)$$

الآن إذاً هذا المغلف حقق المعادلة التفاضلية نقول عنه بأنه الحل الشاذ لها

لنعوض z في المعادلة (I) حيث أن $p = \frac{x}{2}$ && $q = \frac{y}{2}$ والآن نعوض في (I) كلاً من

$$(\#)\& \, p \,\& q \to z = px + qy - p^2 - q^2 \xRightarrow{\text{و بالتعويض والاختصار}} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

حصلنا على مطابقة وبالتالي $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ هو حل شاذ للمعادلة (I)

مسألة القيمة الابتدائية:

هذه المسائل عبارة عن معادلات تفاضلية تحوي شروط ابتدائية تقوم بإعطاء المتغيرات قيم ابتدائية تساعدنا في إيجاد الحل العام لهذه المعادلات.

مثال:

حل مسألة القيمة الابتدائية التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xe^t \dots \dots \dots \dots (I)$$

حيث u دالة في المتغيرين المستقلين x,t والشرط الابتدائي $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=e^t, u(0.t)=t$

الحل:

لدينا المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2xe^t$ تكامل بالنسبة ل x ومنه : $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2e^t+F(t) \dots\dots\dots (II)$

بحيث $F(t)$

دالة كيفية لاتحوي x نكامل مرة ثانية لنوجد التابع u ومنه:

$$u=\frac{x^3}{3}e^t+xF(t)+g(t) \dots\dots\dots\dots (III)$$

حيث $g(t)$ دالة كيفية تابعة ل t فقط لا تحوي x والآن بقي علينا إيجاد التابع $F(t),g(t)$

حسب شروط البدء لدينا : $u(0,t)=t$ ، $\frac{\partial y}{\partial x}(0,t)=e^t$ نعوض الشرط الأول في (II)

$$e^t=0+F(t)\rightarrow F(t)=e^t$$

الشرط الثاني نعوضه في التابع u أي في (III) ومنه:

$$t=0+0+g(t)\rightarrow g(t)=t \xRightarrow{\text{نعوض } F,g \text{ في التابع } u} u=\frac{x^3}{3}e^t+xe^t+t$$

مسألة القيم الحدية:

إن مسألة القيم الحدية تختلف اختلاف بسيط عن مسألة القيم الابتدائية وذلك بأن مسألة القيم الحدية تكون شروطها بأكثر من قيمة للمتغير المستقل.

مثال:

أوجد الحل لمسألة القيم الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x.y : u(0,y)=y^2 \;\&\&\; u(x,1)=sin(x)$$

حيث $u=u(x,y)$

الحل :

لإيجاد التابع u علينا بالمكاملة مرتين مرة بالنسبة ل x ومرة بالنسبة ل y

نكامل بالنسبة ل x : تابع يحوي y $(\varphi(y))$: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2}y + \varphi(y)$

نكامل بالنسبة ل y : $u = \frac{x^2}{2}.\frac{y^2}{2} + \varphi_1(y) + p(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

حيث $p(x), \varphi_1(y)$ دوال كيفية لإيجادها من الشروط الابتدائية :

$$u(0,y) = y^2 \;\;,\;\; y^2 = \varphi_1(y) + p(0)\&\&$$

$$u(x,1) = sin(x) \xRightarrow{\text{نعوض في}(I)} sin(x) = \frac{x^2}{4} + \varphi_1(1) + p(x)$$

من الأولى: $y^2 = \varphi_1(y) + p(0) \to \;\varphi_1(y) = y^2 - p(0)$

من الثانية : $sin(x) = \varphi_1(1) + p(x) \to p(x) = sin(x) - \varphi_1(1) - \frac{x^2}{4} \to$

$$p(0) = sin(0) - \varphi_1(1) - 0 = -\varphi_1(1) \xRightarrow{\text{نعوض}p(x)\text{ و }\varphi_1(y)\text{ في }u} u$$

$$= \frac{x^2y^2}{4} + y^2 - \left(-\varphi_1(1)\right) + sin(x) - \varphi_1(1) - \frac{x^2}{4} \to$$

$$u = \frac{x^2y^2}{4} + y^2 + sin(x) - \frac{x^2}{4}$$

الوقت لا ينتظر أحدا . . وكل لحظة تملكها هي ثروة

فلا تضيعها فهي اما لك او عليك

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نص الله*علا الدالاتي*دعاء الرحيل