◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الثانية عشرة ◄ عنوان المحاضرة: تطبيقات الحساب التفاضلي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ نظرية القيمة الوسطى (لتابع لمتغير واحد ، و من ثم لعدة متغيرات مستقلة)

٢ـ نظرية تايلور لنشر الدوال (تابع لمتحول واحد ، و من ثم تابع لعدة متحولات)

٣ـ نظرية يونغ

٤ـ مثال يوضح كيفية نشر تابع لمتحول واحد في منشور تايلور

تطبيقات الحساب التفاضلي للدوال الحقيقة التابعة لعدة متغيرات:

نظرية القيمة الوسطى لمتغير واحد:

لتكن لدينا الدالة: $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$

قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة في النقاط المحيطية a, b عندئذٍ يوجد:

$$\mu \in]a,b[\;;\; \varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\mu)$$

حيث μ تحقق:

$$ei: a < \mu < b$$
$$or: \mu = a + \theta(b-a) \;;\; 0 < \theta < 1$$

تعميم النظرية السابقة على $\mathbb{R}^n$:

لنأخذ الدالة f بالشكل:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

حيث D مجموعة مفتوحة ولتكن $(c+h) \in D$ و c ، و بفرض أن القطعة المستقيمة الواصلة بين $(c+h)$ و c محتواه في D .

فإذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \;;\; i = 1, \dots, n \quad \text{بحيث} \quad i = 1,2,3, \dots, n$$

موجودة ومستمرة في الساحة D ، عندئذٍ:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c + \theta h) \;;\; 0 < \theta < 1$$

و لنربط الرموز القديمة بالرموز الجديدة فنضع :

$$c + h = b \quad , \quad c = a$$

عندئذٍ:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a_i + \theta(b_i - a_i)\big) \; ; \; 0 < \theta < 1$$

مبرهنة:

لتكن الدالة: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

حيث D مجموعة مفتوحة ومترابطة، وكانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ موجودة ومستمرة على D و تحقق أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, .. = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$ ((جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى متساوية))

عندئذٍ تكون الدالة f ثابتة.

البرهان:

ليكن $a, b \in D$ وبما أن D مجموعة مترابطة عندئذٍ يكون الخط المضلع الواصل بين a و b يقع بأكمله في D وليكن هذا الخط هو:

$$L_1, L_2, \dots \dots , L_{n-1}$$

و رؤوس هذا الخط هي:

$$a \underbrace{,}_{L_1} c^1 \underbrace{,}_{L_2} c^2 , \dots \dots , c^{n-2} \;, c^{n-1} \underbrace{,}_{L_{n-1}} b$$

◄**ملاحظة:** الرمز $c^1, c^2, \dots, c^{n-1}$ لا نقصد بها قوة و إنما ترقيم و كتبناه في الأعلى لأننا سنضع دليلاً آخر في الأسفل بعد قليل.

ولنطبق نظرية القيمة الوسطى على النقطتين a, c^1:

$$\underbrace{f(c^1)}_{\text{النهاية}} - \underbrace{f(a)}_{\text{البداية}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(c_i^1 - a_i)}_{\text{حول المجال}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \big(a + \theta(c^1 - a)\big)$$

بين $0 < \theta < 1$، وبما أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \, ; i = 1, \dots, n$$

عندئذٍ:

$$f(c^1) - f(a) = 0$$
$$\Rightarrow f(c^1) = f(a)$$

وبنفس الطريقة نطبق القيمة الوسطى على c^1, c^2 فنحصل على $f(c^1) = f(c^2)$، وهكذا نجد أن :

$$f(a) = f(c^1) = f(c^2) = \dots \dots = f(c^n) = f(b)$$

أي أن f دالة ثابتة. ((جميع صور النقاط متساوية .. فهي دالة ثابتة))...☺

نظرية تايلور لمتغير واحد:

ليكن لدينا الدالة:

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

وليكن $[x_0, x_0 + h] \subseteq D$

و لنفرض أن لـf مشتقات موجودة ومستمرة على D حتى المرتبة $n+1$، ولنفرض أن f مستمرة في النقاط المحيطية في D، عندئذٍ:

$$h = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n+1}$$ **((حفظ))**

حيث:

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(x_0 + \theta h)\ ; 0 < \theta < 1$$ ((صيغة لاغرانج))

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(1 - \theta')f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h) \quad ; 0 < \theta' < 1$$ ((صيغة كوشي))

لتعميم نظرية تايلور على $\mathbb{R}^2$:

ليكن لدينا :

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ولتكن النقطتين $(a,b), \left(\underbrace{a+h}_{x}, \underbrace{b+k}_{y}\right) \in D$ و القطعة الواصلة بينهما محتواه في D والمشتقات الجزئية حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) موجودة ومستمرة على D

و أيضاً الدالة f مستمرة في النقاط المحيطية للمجموعة D .

و لتعرف دالة جديدة:

$$\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \varphi(t) = f(\underbrace{a+th}_{x(t)}, \underbrace{b+tk}_{y(t)})$$

نشتق φ بالنسبة ل t:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)\frac{\partial y}{dt}$$
$$= h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$ ((المشتق الأول))

◄**تنويه للاختصار في الرموز قمنا باستبدال:**

$$\boldsymbol{f(a+th, b+tk) = f(x,y) = f}$$

نشتق مرة أخر و بملاحظة أن المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة و بالتالي تكون المشتقات المختلطة متساوية :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$=h\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}.\frac{dy}{dt}\right]+k\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}.\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk.\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}+kh.\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(\underbrace{x}_{=a+th},\underbrace{y}_{=b+tk}\right)$$

من أجل أي مرتبة للاشتقاق $p<m+1$ ، عندئذٍ:

$$\frac{d^p\varphi}{\partial t^p}=h^p\frac{\partial^p f}{\partial x^p}+\frac{ph^{p-1}k}{1!}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}+\frac{p(p-1)h^{p-2}k^2}{2!}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2}\partial y^2}+\ldots+k^p\frac{\partial^p f}{\partial y^p}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(a+th,b+tk)\ldots\ldots(*)$$

بالعودة الى نشر تايلور بمتغير واحد بحيث نأخذ $x_0=0\,,h=1$ نعوض:

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\frac{\varphi'(x_0)}{1!}+\frac{\varphi''(x_0)}{2!}+\ldots\ldots+\frac{\varphi^{(m)}(x_0)}{m!}+R_{m+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+R_{m+1}$$

حيث:

$$R_{m+1}=\frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{m!}\ ;\ 0<\theta<1$$

وهكذا نكون قد وجدنا باستخدام العلاقة (*) نظرية تايلور لمتغيرين و التي تنص على أنه إذا كان:

$$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

ولتكن $(a,b)\epsilon D$ و $(a+h,b+k)\in D$ والقطعة المستقيمة الواصلة بينهما محتواه في D والمشتقات الجزئية حتى المرتبة $m+1$ (بما فيها $m+1$) موجودة ومستمرة على D والدالة f مستمرة في النقاط المحيطية، عندئذٍ:

$$\underbrace{f\left(\underbrace{a+h}_{x},\underbrace{b+k}_{y}\right)}_{\text{صورة النهاية}}-\underbrace{f(a,b)}_{\text{صورة البداية}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_{m+1}$$

حيث : $R_{m+1}=\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}}{(m+1)!}f(a+\theta h,b+\theta k)\ \ ;\ 0<\theta<1$

◄**تنويه** : **المطلوب من التعميم السابق حفظ العلاقة (*) فقط...☹**

◄**ملاحظة** : إذا وجدت المشتقات الجزئية لدالة f من جميع المراتب فإن:

$$R_{m+1_{n\to\infty}}\to 0$$

عندئذٍ:

$$\boxed{f\left(\underbrace{a+h}_{x},\underbrace{b+k}_{y}\right)-f(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(a,b)}$$

فإننا ندعوه بمنشور تايلور للدالة f في جوار النقطة (a,b).

نظرية يونغ:

إذا كانت f دالة تحقق الشروط الواردة بنظرية تايلور لمتغيرين فإن باقي تايلور (R_{m+1}) يعطى بالدستور:

$$R_{m+1}=\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(m+1)}}{(m+1)!}f(a+\theta h,b+\theta k)+\mu(h,k)\sqrt{(h^2+k^2)^m}$$

حيث $\mu(h,k)$ دالة حقيقة تحقق

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\mu=0$$

تمرين:

اكتب الحدود الثلاثة الاولى من منشور الدالة f في جوار $(0,0)$:

$$f(x,y)=e^x\cos y$$

حيث f معرفة بالشكل: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

الحل:

((الحد الأول)) $f(0,0)=e^0.\cos 0=1$

((الحد الثاني)) $\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$

((الحد الثالث)) $\frac{1}{2!}\left(h.\frac{\partial}{\partial x}+k.\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(0,0)=\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\mathrm{k}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(0,0)$

إن:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \quad \Rightarrow f_x(0,0) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y \Rightarrow f_{yy}(0,0) = -1$$
$$f_{xy}(x,y) = -e^x \sin y \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0 = f_{yx}(0,0)$$

الآن نعوض في صيغة نشر تايلور :

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + \mathrm{k}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) + R_3$$

$$\Rightarrow e^h \cos k - 1 = \frac{h + k.0}{1!} + \frac{h^2 + 0 - k^2}{2!} = h + \frac{h^2}{2} - \frac{k^2}{2}$$
$$\Rightarrow e^h \cos k = 1 + h + \frac{h^2}{2} - \frac{k^2}{2}$$

إن:

$$x = a + h \Rightarrow x = h$$
$$y = b + k \Rightarrow y = k$$
$$\Rightarrow e^x \cos y = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

وهو المطلوب...☺

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_رهف النقشي_سارة شهاب