نظري

◄ دكتورة المادة: ملك ماورديني

◄المحاضرة : الخامس عشرة

◄عنوان المحاضرة : مبرهنة الدوال الضمنية وطريقة شارب

المحتوى العلمي :

١ـ حل تمرين من مسألة الشروط.

٢ـ حلول المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى غير الخطية.

٣ـ طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى غير الخطية.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial y}\ldots(1)$$

حيث:

$$Z(0,y)=8e^{-3y}$$

الحل

نكتب التابع $Z=X_{(x)}.Y_{(y)}$ لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=X'Y\quad \&\&\quad \frac{\partial z}{\partial y}=Y'X$$

نعوض بالمعادلة (1):

$$X'Y=4XY'$$

المعادلة قابلة لفصل المتغيرات لذلك نقسم على $4XY$:

$$\frac{X'}{\underbrace{4X}_{1}}=\frac{Y'}{\underbrace{Y}_{2}}=\underbrace{\lambda}_{3}$$

نأخذ النسبة الأولى مع λ أي $(3 = 1)$ فنجد :

$$\frac{X'}{4X} = \lambda \Rightarrow \frac{X'}{X} = 4\lambda \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} ln|X| = 4\lambda x + C_1'$$

$$\Rightarrow X = e^{4\lambda x + C_1'} = e^{\lambda x}.e^{C_1'} \; ; \; e^{C_1'} = C_1$$

$$\Rightarrow x = C_1 e^{4\lambda x}$$

نأخذ النسبة الثانية مع λ أي $(3 = 2)$ فنجد:

$$\frac{Y'}{Y} = \lambda \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} ln|Y| = \lambda y + C_2'$$

$$\Rightarrow Y = e^{\lambda y + C_2'} = e^{\lambda y}.e^{C_2'}; e^{C_2'} = C_2 \Rightarrow Y = C_2 e^{\lambda y}$$

نعوض كل من X, Y في Z ومنه :

$$Z = X.Y \Rightarrow Z = C_3 e^{4\lambda x}.e^{\lambda y}; C_3 = C_1.C_2$$

$$\Rightarrow Z = C_3 e^{\lambda(4x+y)}$$

لحساب λ و C_3 من الشرط الابتدائي و المطابقة:

$$Z(0,y) = 8e^{-3y}$$

$$Z(0,y) = C_3 e^{\lambda y} = 8e^{-3y}$$

$$\Rightarrow C_3 = 8 \; , \qquad \lambda = -3$$

نعوض في الحل Z فنجد:

$$Z(x,y) = 8e^{-3(4x+y)}$$

و هو المطلوب...☺

مثال2: أوجد حل مسألة الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات:

$$3.\frac{\partial z}{\partial x} + 2.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ldots (1)$$

حيث: $Z(x,0) = 4e^{-x}$

الحل

$$Z = X.Y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y \quad \&\& \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Y'X$$

نعوض بالمعادلة (1):

$$3.X'Y = -2.XY' \Rightarrow \underbrace{\frac{X'}{2X}}_{1} = \underbrace{-\frac{Y'}{3Y}}_{2} = \underbrace{\lambda}_{3}$$

$$1 = 3 \Rightarrow \frac{X'}{X} = 2\lambda \Rightarrow ln\,|X| = 2\lambda x + C_1' \Rightarrow X = C_1 e^{2\lambda x}\,; C_1 = e^{C_1'}$$

$$2 = 3 \Rightarrow -\frac{Y'}{3Y} = \lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = -3\lambda \ \Rightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{C}_2.e^{-3\lambda y}$$

نعوض X, Y في Z فنحصل على:

$$Z = X.Y = C_1.C_2.e^{2\lambda x}.e^{-3\lambda y}$$

$$\Rightarrow Z = C_3.e^{\lambda(2x-3y)}$$

من الشرط الابتدائي ثم المطابقة:

$$Z(x,0) = 4e^{-x}$$

$$Z(x,o) = C_3 e^{2\lambda x} = 4e^{-x}$$

$$C_3 = 4 \ \& \ 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

وبناءً عليه يكون الحل العام المطلوب كالتالي:

$$Z(x,y) = 4e^{-\frac{1}{2}(2x-3y)} = 4e^{-x+\frac{3}{2}y}$$

مثال3: أوجد حل مسألة لشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ldots (♥)$$

حيث: $\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0 \ \& \ U(x,0) = 3cos\,5x$

الحل

يكون الحل باستخدام فصل المتغيرات من الشكل:

$$U = X.T$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'T \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Xt' \quad \& \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

نعوض في المعادلة (♥):

$$XT' = 5X''T \Rightarrow \frac{T'}{\underbrace{5T}_{1}} = \frac{X''}{\underbrace{X}_{2}} = \underbrace{-\lambda^2}_{3}$$

$$1 = 3 \Rightarrow \frac{T'}{5T} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T} = -5\lambda^2 \Rightarrow ln|T| = -5\lambda^2 t + C_1' \;\Rightarrow T = C_1.e^{-5\lambda^2 t}$$

$$2 = 3 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

معادلة تفاضلية عادية خطية من الدرجة الثانية متجانسة والمعادلة المميزة لها:

$$\mu^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm i\lambda$$

فالحل العام من الشكل:

$$X = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x$$

نعوض كلاً من X, T في U :

$$U = X.T = e^{-5\lambda^2 t}(C_4 \cos \lambda x + C_5 \sin \lambda x)$$

حيث: $C_4 = C_1.C_2 \quad \& \quad C_5 = C_1.C_3$

- الشرط الأول:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = e^{-5\lambda^2 t}(-C_4\lambda \sin \lambda x + C_5\lambda \cos \lambda x)$$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = e^{-5\lambda^2 t}(C_5\lambda \cos 0) = \underbrace{e^{-5\lambda^2 t}}_{\text{دالة أسية لاتنعدم}} \; C_5 \; \underbrace{\lambda}_{\neq 0} = 0$$

$\lambda \neq 0$ ((لأنه لو كانت $\lambda \neq 0$ لكانت $\frac{T'}{5T} = \frac{X''}{X} = 0$ وهذا خاطئ)).

إذاً $C_5 = 0$ ، نعوض في الحل U فنجد:

$$U = e^{-5\lambda^2 t}(C_4 \cos \lambda x) \dots (*)$$

من الشرط الثاني والمقارنة:

$$U(x,0) = 3\cos 5x$$

$$U(x,0) = C_4 \cos \lambda x = 3\cos 5x$$

$$\Rightarrow C_4 = 3 \quad \& \quad \lambda = 5$$

نعوض في (*) فيصبح لدينا:

$$U = e^{-125t}(3\cos 5x) = 3\cos 5x \;\; e^{-125}$$

وانتهينا...☺

مثال 4 : أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\frac{du}{dt} \dots (1)$$

حيث: أي محدودة $0 < x < 3$

$$\& U(0,t) = U(3,t) = 0 \;\&\; U(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

الحل

$$U = X.T$$

نوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = X''T \quad \&\& \quad \frac{du}{dt} = T'X$$

نعوض بالمعادلة (1) :

$$X''T = \frac{1}{h^2}T'X$$

معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرات نقسم على XT :

$$\underbrace{\frac{X"}{X}}_{1}=\underbrace{\frac{1}{h^2}\frac{T'}{T}}_{2}=\underbrace{-\lambda^2}_{3}((\text{كونها مرتبة ثانية}))$$

نأخذ النسبة الأولى مع $-\lambda^2$ أي $(1=3)$ ومنه:

$$\frac{X"}{X}=-\lambda^2 \Rightarrow X"+\lambda^2 X=0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة ذات أمثال ثابتة، المعادلة المميزة لها:

$$\mu^2+\lambda^2=0 \Rightarrow \mu=\pm i.\lambda$$

والحل العام يكون من الشكل :

$$X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$$

نأخذ النسبة الثانية أي $(2=3)$:

$$\frac{1}{h^2}\frac{T'}{T}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T}=-h^2\lambda^2 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} ln|T|=-h^2\lambda^2 t+C$$

$$\Longrightarrow T=C_3e^{-h^2\lambda^2 t}$$

نعوض X,T في U فنجد:

$$U=X.T \Rightarrow U=(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x)C_3e^{-h^2\lambda^2 t}$$

$$=C_4\cos\lambda x\ \ e^{-h^2\lambda^2 t}+C_5\sin\lambda x\ \ e^{-h^2\lambda^2 t}$$

ولمعرفة الثوابت λ , C_5 , C_4 نستفيد من الشروط الابتدائية حيث $U(0,t)=0$ أي نعوض $x=0$ ومنه:

$$U(0,t)=C_4\cos\lambda x\,.\,e^{-h^2\lambda^2 t}=C_4e^{-h^2\lambda^2 t}\xRightarrow{e^{-h^2\lambda^2 t}\neq 0} C_4=0=D$$

$$U=(C_4\cos\lambda x+C_5\sin\lambda x)\,e^{-h^2\lambda^2 t}$$

$$U(3,t)=\underbrace{C_5}_{\text{لا تنعدم لكي لا يصبح حل صفري}}\ .\ \underbrace{\sin\lambda x}_{\text{إذن يجب أن يكون هذا معدوم}}\ .\underbrace{e^{-h^2\lambda^2 t}}_{\neq 0}=0$$

$$\sin 3\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda=n\pi \rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{3}$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في}(U)} U = C_5 \,.\, sin \frac{n\pi}{3} x \;.\, e^{-\frac{h^2 n^2 \pi^2}{9} t}$$

ومنه حسب مبدأ تركيب الحلول نجد أن:

$$* \begin{cases} U = C_5 . e^{-\frac{h^2 n_1^2 \pi^2}{9} t} . sin \frac{n_1 \pi}{3} x + C_6 . e^{-\frac{h^2 n_2^2 \pi^2}{9} t} . sin \frac{n_2 \pi}{3} x \\ \qquad + C_7 . e^{-\frac{h^2 n_3^2 \pi^2}{9} t} . sin \frac{n_3 \pi}{3} x \end{cases}$$

ومن الشرط الثالث:

$$U(x,0) = 5 \, sin \, 4\pi x - 3 \, sin \, 8\pi x + 2 \, sin \, 10\pi x$$

فنجد بالمقارنة:

$$\begin{cases} \frac{n_1 \pi}{3} = 4\pi \Rightarrow n_1 = 12 \\ \frac{n_2 \pi}{3} = 8\pi \Rightarrow n_2 = 24 \\ \frac{n_3 \pi}{3} = 10\pi \Rightarrow n_3 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_5 = 5 \\ C_6 = -3 \\ C_6 = 2 \end{cases}$$

نعوض في $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب

مثال5: حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\partial z}{\partial y} + z \ldots (1)$$

حيث:
$$Z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

الحل

نكتب التابع $Z = X_{(x)} . Y_{(y)}$ لنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y \quad \&\& \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Y'X$$

نعوض بالمعادلة (1):

$$X'Y = 2XY' + XY$$

المعادلة قابلة لفصل المتغيرات لذلك نقسم على XY:

$$\underbrace{\frac{X'}{X}}_{1} = \underbrace{2\frac{Y'}{Y} + 1}_{2} = \underbrace{\lambda}_{3}$$

نأخذ النسبة الأولى مع λ أي $(1 = 3)$ فنجد :

$$\frac{X'}{X} = \lambda \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} ln|X| = \lambda x + C_1' \rightarrow X = e^{\lambda x + C_1'} = e^{\lambda x}.e^{C_1'} \; ; \; e^{C_1'} = C_1$$
$$\Rightarrow X = C_1 e^{\lambda x}$$

نأخذ النسبة الثانية مع λ أي $(2 = 3)$ فنجد:

$$2\frac{Y'}{Y} + 1 = \lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = \frac{\lambda - 1}{2} \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} ln|Y| = \frac{\lambda - 1}{2} y + C_2'$$
$$\Rightarrow Y = e^{\frac{\lambda-1}{2}y + C_2'} = e^{\frac{\lambda-1}{2}y}.e^{C_2'}; e^{C_2'} = C_2 \Rightarrow Y = C_2 e^{\frac{\lambda-1}{2}y}$$

نعوض كل من X, Y في Z ومنه :

$$Z = X.Y \Rightarrow Z = C_1.C_2.e^{\lambda x}.e^{\frac{\lambda-1}{2}y} = C_3.e^{\lambda x + \frac{\lambda-1}{2}y} \; ; C_3 = C_1.C_2$$
$$\Rightarrow Z = C_3 e^{\left(\lambda x + \frac{\lambda-1}{2}y\right)} \ldots (*)$$

لحساب λ و C_3 من الشرط الابتدائي:

$$Z(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

نعوض $y = 0$ في Z حيث:

$$Z = C_3 e^{\left(\lambda\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2}\right)}$$

حسب مبدأ تركيب الحلول:

$$Z = C_3 e^{\left(x + \frac{y}{2}\right)\lambda_1 - \frac{y}{2}} + C_4 e^{\left(x + \frac{y}{2}\right)\lambda_2 - \frac{y}{2}}$$

$$\xRightarrow[y=0]{\text{نعوض الآن}} Z(x, 0) = C_3 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_2 x} \ldots (**)$$

بالمقارنة مع الشرط الابتدائي نجد :

$$C_3 = 3 \;\; \&\& \;\; \lambda_1 = -5 \;\; \&\& \;\; C_4 = 2 \;\; \&\& \;\; \lambda_2 = -3$$

نعوض في $(**)$ فنجد:

$$Z = 3e^{-5\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}} + 2e^{-3\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}} = 3e^{(-5x-3y)} + 2e^{(-3x-2y)}$$

و هو المطلوب...☺

مثال6:

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستخدام فصل المتغيرات :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{dt} \dots (1)$$

حيث: $0 < x < 3$ أي محدودة

$$\&\&\ u(0,t) = u(3,t) = 0\ \&\&\ u(x,0) = 5\sin 4\pi x$$

الحل

$$U = X.T$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = X''T \quad \&\& \quad \frac{du}{dt} = T'X$$

نعوض بالمعادلة (1) :

$$X''T = \frac{1}{2}T'X$$

معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرات نقسم على XT :

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{T'}{T}}_{2} = \underbrace{-\lambda^2}_{3}$$ ((كونها مرتبة ثانية))

نأخذ النسبة الأولى مع $-\lambda^2$ أي $(1 = 3)$ ومنه:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

و هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة ذات أمثال ثابتة تقبل حلا من الشكل $X = e^{\mu x}$ ومنه :

$$X'' = \mu^2 e^{\mu x} \xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} \mu^2 e^{\mu x} + \lambda^2 e^{\mu x} = 0 \Rightarrow e^{\mu x}(\mu^2 + \lambda^2) = 0\,;\, e^{\mu x} \neq 0$$

فتكون المعادلة المميزة لها:

$$(\mu^2+\lambda^2)=0 \Rightarrow \mu^2=-\lambda^2 \xrightarrow{\text{وبالتالي}} \mu=\pm i\lambda$$

والحل العام يكون من الشكل : $X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$

نأخذ النسبة الثانية أي $(2=3)$:

$$\frac{1}{2}\frac{T'}{T}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{T'}{T}=-2\lambda^2 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln|T|=-2\lambda^2T+C_1'$$

$$\Rightarrow T=e^{-2\lambda^2t+C_1'}=e^{-2\lambda^2t}.e^{C_1'} : \ e^{C_1'}=C_3 \Longrightarrow T=C_3e^{-2\lambda^2t}$$

نعوض X,T في U فنجد:

$$U=(C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x)C_3e^{-2\lambda^2t}$$

نعوض بالشرط الابتدائي :

$$U(0,t)=0$$

$$U(0,t)=(C_1+0)C_3e^{-2\lambda t}=C_1C_3e^{-2\lambda^2t} ;$$

لكن $e^{-2\lambda^2t}\neq 0$ ، ومنه يكون:

$$\Rightarrow C_1C_3=0=D$$

$$U=(C_1C_3\cos\lambda x+C_2C_3\sin\lambda x)e^{-2\lambda^2t}$$

$$U=(D\cos\lambda x+E\sin\lambda x)e^{-2\lambda^2t}$$

حيث: $E=C_2.C_3$

لكن $D=0$ ، ومنه نجد:

$$U=E\sin\lambda x\ .e^{-2\lambda^2t}$$

وبقي لمعرفة E و λ من الشرط الابتدائي:

$$U(3,t)=0$$

$$U(3,t)=E\sin 3\lambda\,.\underbrace{e^{-2\lambda^2t}}_{\neq 0}=0\ \ldots\ldots\ldots (I)$$

$E\neq 0$ مستحيل أن تكون معدومة لأنها تجعل الحل تافه ، حيث:

$U = 0 + 0$ وهذا غير ممكن😂

$$\sin 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{3}$$

$$\xRightarrow{\text{نعوض في}(I)} u = E\ \sin\frac{n\pi}{3}x\ e^{-\frac{2n^2\pi^2 t}{9}} \dots (**)$$

والآن نحسب E من الشرط التالي:

$$U(x,0) = 5\sin 4\pi x$$

$$U(x,0) = E\sin\frac{n}{3}\pi x$$

بالمقارنة: $E = 5\ \ ,\ \ n = 12$

نعوض في (**) فنحصل على:

$$U = 5\sin 4\pi x\ .e^{-32\pi^2 t}$$

وهو المطلوب.

◀**تنويه**: الأمثلة التي تحمل الأرقام (1-2-3-4) قامت الدكتورة بإدراجها ضمن ملحق المادة.

تذكرة: لقد مر معنا سابقاً أنه إذا كان لدينا التابع $Z = Z(x,y)$ تابع بمتغيرين مستقلين فإن تفاضل هذا التابع هو:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy$$

وفي حال كانت معادلة السطح $F(x,y,z) = 0$ فإن التفاضل الكلي للسطح هو :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:

مبرهنة الدوال الضمنية:

ليكن لدينا الدالتين: $F(x,y,z,p,q) = 0\ \ \&\&\ \ \Phi(x,y,z,p,q) = 0$

حيث p, q دالتين بمجهولين ثابتين للمتغيرات المستقلة x, y, z عندها تكون المشتقات الجزئية كالتالي:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots\dots\dots\dots (I)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots\dots\dots\dots (II)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots\dots\dots\dots (III)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial q}} \dots\dots\dots\dots\dots (IV)$$

<u>إثبات العلاقة (I)</u> ((للاطلاع)):لنأخذ المشتقات الجزئية لكل من Φ, F بالنسبة ل x, y, z ومنه:

$$1)\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

$$2)\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$3)\ \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=0$$

$$4)\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

$$5)\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$6)\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=0$$

لنأخذ الآن $\frac{\partial p}{\partial x}$ من (١) و (٤) نجد:

من (1)
$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial F}{\partial p}}$$

من (4)
$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}}$$

بالمساواة طرفاً إلى طرف نجد :

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}}$$

$$\xRightarrow{\text{نأخذ جداء الطرفين بالوسطين}}\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}=\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}$$

نجعل الحدود التي فيها $\frac{\partial q}{\partial x}$ بطرف والباقي بطرف آخر :

$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

$$\xRightarrow{\text{نخرج } \frac{\partial q}{\partial x} \text{عامل مشترك}}\frac{\partial q}{qx}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}\right]=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial q}{qx}=\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial \Phi}{\partial q}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}}$$

وهو المطلوب...😒

طريقة شارب في حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى غير الخطية:

$$F(x,y,z,p,q)=0\ \dots\dots\dots.\quad (1)\ ;\ p=\frac{\partial z}{\partial x}\ \&\&\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

ولتكن لدينا المعادلة: $\Phi(x,y,z,p,q,a)=0\ \dots\dots\dots(2)$

((حيث a ثابت اختياري)) وتحقق الشرطين التاليين:

١) إن حل المعادلتين (2)و(1) بالنسبة ل p,q هو من الشكل :

$$\boxed{3}\begin{cases}p=p(x,y,z,a)\\ q=q(x,y,z,a)\end{cases}$$

٢) المعادلة التفاضلية الكلية التالية:

((قابلة للحل)) $dz=pdx+qdy\ \dots\dots..(4)$

عندئذ نسمي المعادلة (2) معادلة مرافقة ل (1) الآن نعوض (3) في (4) فنجد أن :

$$dz=p(x,y,z,a)dx+q(x,y,z,a)dy\ \dots\dots\dots.(5)$$

إن المعادلة (5) محتمل أن تمتلك حل ومحتمل أن لا تمتلك حل...☹

في حال كانت تمتلك حل فهو من الشكل:

$$F(x,y,z,a,b)=0\ \dots\dots\dots..(6)$$

وهو حل تام للمعادلة (1).

فيكون حل تام للمعادلة (1) لنرى كيف يتم ذلك باتباع المخطط التالي:

(6) حل ل (3) $\xRightarrow{\text{وبالتالي}}$ (5) حل للمعادلة (3) $\xRightarrow{\text{وبالتالي}}$ المعادلة(6) حل للمعادلة(5)

(6) حل ل(1) $\overset{\text{فإن}}{\Rightarrow}$ وكون (3) حل ل(2)و(1)

والآن لنعين الشرط الذي يجب تحققه (1) حتى تكون (2) هي معادلة تفاضلية مترافقة مع (1) فإن شرط قابلية مرافقة (5) هو أن تحقق لها العلاقة:

((لنأخذ مشتق q بالنسبة ل x يساوي مشتق p بالنسبة ل y)) ومنه:

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{q}=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{p}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}\ \dots(7)$$

نعوض في (7) كلاً من (($\frac{\partial q}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$)) الموجودة في علاقات نظرية الدوال الضمنية ((I , II , III , IV)) وبذلك نحصل على:

$$(II) + q\,(III) = I + p\,(IV)$$

وبالتعويض والاختصار نحصل على المساواة التالية:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial F} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى خطية حيث Φ الدالة المحاطة و $\big((x,y,z,p,q)\big)$ متغيرات مستقلة عندئذٍ يمكن إيجاد حلها التام للجملة المساعدة التالية:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}} \dots\dots\dots (9)$$

إن (9) هي الجملة المساعدة ومنه نوجد حل هذه الجملة بحيث يكون الحل فيه q أو p أو كلاهما وهذا الحل يمثل قابلية الحل للمعادلة (5) ...☺

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله & رهف النقشي & دعاء الرحيل