نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة الخامسة عشر (الأخيرة) ◄ عنوان المحاضرة: تمارين لاغرانج

بسم الله وبالله المستعان . . لنبدأ زملائي في محاضرتنا الأخيرة التي سنتناول بها حل تمارين عن لاغرانج .

تمرين (1)

ليكن OX,OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك للمستوي oxy إذا فرضنا أن النقطة المادية خاضعة لتأثير قوة دافعة متناسبة مع بعدها عن (o) وأن المستوي يدور حول oy بدوران منتظم ω

أكتب المعادلات التفاضلية للحركة باستخدام معادلات لاغرانج .

الحل

نعلم ان قانون الطاقة الحركية $T=\frac{1}{2}mv_a^2$

$$v_a^2=v_r^2+v_e^2 \quad ; \quad q_1=x \quad , \quad q_2=y$$

$$v_r^2=x'^2+y'^2$$

$$\overrightarrow{v_e}=\omega\wedge oM=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \omega & 0\\ x & y & 0\end{vmatrix}=-\omega x\vec{k} \Longrightarrow v_e^2=\omega^2.x^2$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+\omega^2.x^2)}$$

$$u_1=-mg\int dy \Longrightarrow u_1=-mgy$$

$$u_2=\int m\lambda^2 r.dr \Longrightarrow u_2=m\lambda^2\frac{r^2}{2} \Longrightarrow u_2=\frac{m\lambda^2(x^2+y^2)}{2}$$

$$u=u_1+u_2$$

$$\boxed{u=-mgy+\frac{m\lambda^2}{2}(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = m\lambda^2 x$$

$$m.x'' = m\omega^2 x + m\lambda^2 x \Longrightarrow \boxed{x'' = (\omega^2 + \lambda^2)x \dots\dots (1)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = my'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -mg + m\lambda^2 y \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial y\prime} = my''$$

$$\boxed{y'' = -g + \lambda^2 y \dots\dots (2)}$$

بحل كل من المعادلة (1) و (2) التفاضليتين نجد معادلات الحركة للنقطة المادية .

تمرين (2)

M نقطة مادية تتحرك على المنحني المعين بمعادلة المخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = -mk^2 r.\vec{I}$ ، **أكتب معادلات الحركة بالاعتماد على معادلات لاغرانج** .

الحل

من معادلة المخروط نجد ... $x^2 + y^2 = z^2$ وهي معادلة مخروط اسطواني .

لذلك سنأخذ الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z)

نعلم أن طويلة شعاع الموضع $|r| = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow |r| = \sqrt{z^2} \Longrightarrow r^2 = z^2$

$$r = z \Longrightarrow r' = z'$$

ووجدنا سابقاً أن السرعة بالإحداثيات الاسطوانية تعطى بالشكل :

$$v^2 = r'^2 + r^2.\theta'^2 + z'^2 \Longrightarrow v^2 = 2r'^2 + r^2.\theta'^2$$

ونعلم ان الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m[2r'^2 + r^2.\theta'^2]$

$$u = \int -mk^2 r.dr \Longrightarrow u = -\frac{m}{2}k^2 r^2$$

ونعلم أن معادلة لاغرانج $\boxed{\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial q} = 0}$ وهنا لدينا درجتين حرية :

الاولى على (r)

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = 2mr' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'} = 2mr''$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr.\theta'^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -mk^2 r$$

وبالتالي نعوض في معادلات لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial r'} = \frac{\partial (T+u)}{\partial r}$ فنجد :

$$2mr'' = mr.\theta'^2 - mk^2 r \Longrightarrow 2r'' = r.\theta'^2 - k^2 r \Longrightarrow \boxed{r'' = \frac{r(\theta'^2 - k^2)}{2}}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ، نحلها لإيجاد معادلة الحركة على r.

الثانية على (θ)

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2\theta'$$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2\theta'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

وبالتعويض بمعادلات لاغرانج نجد : $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial (T+u)}{\partial \theta}$ فنجد

$$mr^2\theta'' = 0 \Longrightarrow mr^2\theta' = c \Longrightarrow \boxed{r^2\theta' = c_1} \qquad ; c_1 = \frac{c}{m}$$

وهي خاضعة لقانون السطوح ، وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ، بحلها نوجد معادلة الحركة على θ .

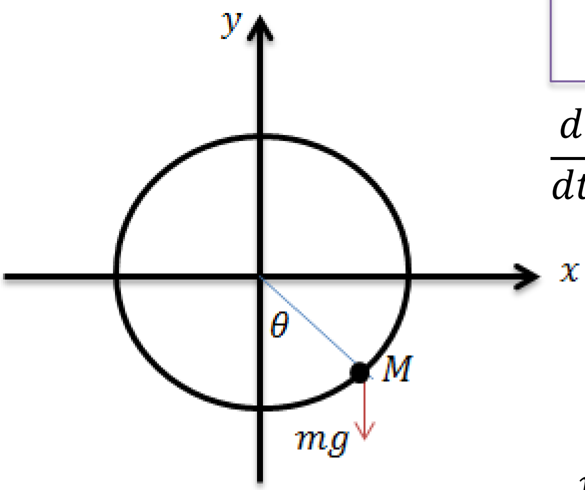
تمرين (3)

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري ثابت في الفراغ نصف قطره a
أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج

الحل

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q = \theta$) إحداثي معمم)

$$x = a.\cos\theta \quad , \quad y = a.\sin\theta$$



حسب معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'_j}-\frac{\partial(T+u)}{\partial q_j}=0$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta'}-\frac{\partial(T+u)}{\partial \theta}=0$$

ونعلم أن قانون الطاقة الحركية $T=\frac{1}{2}mv^2$

$$v=x'\vec{\imath}+y\vec{\jmath} \Rightarrow v^2=x'^2+y'^2$$

$$x'=-a.\sin\theta.\theta' \quad , \quad y'=a.\cos\theta.\theta'$$

$$v^2=a^2.\sin^2\theta.\theta'^2+a^2.\cos^2\theta.\theta'^2$$

$$v^2=a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta).\theta'^2 \Rightarrow \boxed{v^2=a^2.\theta'^2}$$

نعلم أن قوة الثقالة هي قوة كمونية وبالتالي :

$$u=-\int mg\ dy=-mg\ y \Rightarrow u=-mg.a.\sin\theta$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}m[a^2.\theta'^2]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'}=ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta'}=ma^2\theta''$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$m\,a^2\theta''+mag.\cos\theta=0 \Rightarrow \boxed{a(a.\theta''+g.\cos\theta)=0}$$

تمرين (4)

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونصف قطرها a أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النقطة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

الحل

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q=\theta$ إحداثي معمم))

$$x=a.\cos\theta \quad , \quad y=a.\sin\theta$$

حسب معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'_j}-\frac{\partial(T+u)}{\partial q_j}=0$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \theta'}-\frac{\partial (T+u)}{\partial \theta}=0$$

ولدينا : $v_r^2=x'^2+y'^2 \Longrightarrow v_r=x'\vec{i}+y\vec{j}\quad ; \quad T=\frac{1}{2}mv_a^2$

$$x'=-a.\sin\theta\,.\theta' \quad , \quad y'=a.\cos\theta\,.\theta'$$

$$v_r^2=a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2+a^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2$$

$$v_r^2=a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,.\theta'^2 \Longrightarrow v_r^2=a^2.\theta'^2$$

$u=-\int mg\ dy$

على اعتبار أن oy محور صاعد

$$u=-\int mg\ dy=-mg\,y \Longrightarrow u=-mg.a.\sin\theta$$

$$T=\frac{1}{2}mv_a^2 \quad ; \quad v_a=v_r+v_e$$

$$v_e=(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \omega & 0\\ x & y & 0\end{vmatrix} \Longrightarrow \boxed{v_e=-\omega x\,\vec{k}}$$

$$v_a^2=v_r^2+v_e^2 \Longrightarrow v_a^2=a^2.\theta'^2+\omega^2x^2$$

$$\boxed{v_a^2=a^2.\theta'^2+\omega^2a^2.\cos^2\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}ma^2.\theta'^2+\frac{1}{2}m\omega^2a^2.\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'}=ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial\theta}=-m\omega^2a^2.cos\,\theta\,.\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\theta'}=ma^2.\theta''$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$ma^2.\theta''+m\omega^2a^2.cos\,\theta\,.\sin\theta+mga.\cos\theta=0$$

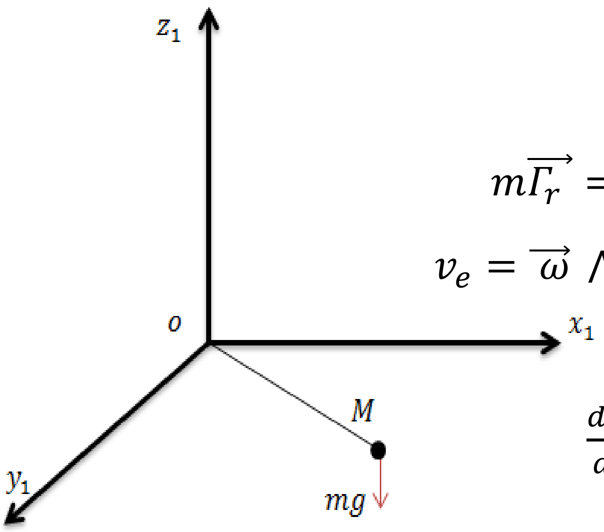
$$\boxed{ma[a\,\theta''+\omega^2a\,cos\,\theta\,.\sin\theta+g.\cos\theta]=0}$$

تمرين (5)

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لمستوي $x_1o_1y_1$ يدور حول محور شاقولي oz_1 بدوران منتظم سرعته ω . **المطلوب :** أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وذلك بفرض أن النقطة تخضع لقوة مركزية جاذبة تتناسب مع بعد النقطة عن مركز الجذب بالإضافة إلى ثقلها .

الحل

M نقطة مادية تخضع لقوتين : قوة الثقل $F_1 = mg$ ورد الفعل R
وقوة مركزية جاذبة $F_2 = -m\,\lambda^2 r$



حسب القانون الاساسي في التحريك النسبي ....

$$m\overrightarrow{\Gamma_r} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_c} \dots\dots (*)$$

نعلم أن السرعة الجرّية هي $v_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} \Longrightarrow v_e = \omega \wedge r$

ومنه التسارع الجرّي $\Gamma_e = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 . oM$

نلاحظ أن الدوران منتظم حول oz اي إن $\varepsilon = 0$ لأن $\frac{d\omega}{dt} = 0$

(الحركة فقط في المستوي $x_1 o_1 y_1$) $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\Gamma_e = -\omega^2 . \vec{r}$$

$$\Gamma_e = -\omega^2 (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \Longrightarrow \Gamma_e = -\omega^2 x\vec{\imath} - \omega^2 y\vec{\jmath}$$

$$J_e = -m\Gamma_e \Longrightarrow \boxed{J_e = m\omega^2 x\vec{\imath} + m\omega^2 y\vec{\jmath}}$$

$$\Gamma_c = 2(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}) = 2\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = 2(-\omega y'\vec{\imath} + \omega x'\vec{\jmath})$$

ومنه التسارع المتمم .... $\Gamma_c = -2\omega y'\vec{\imath} + 2\omega x'\vec{\jmath}$

$$J_c = -m\Gamma_c \Longrightarrow \boxed{J_c = 2m\omega y'\vec{\imath} - 2m\omega x'\vec{\jmath}}$$

$$F_2 = -m\,\lambda^2 \vec{r} \Longrightarrow F_2 = -m\,\lambda^2 (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$

$$\boxed{F_2 = -m\lambda^2 x\vec{\imath} - m\lambda^2 y\vec{\jmath}}$$

نعوض ما سبق في $(*)$ فنجد :

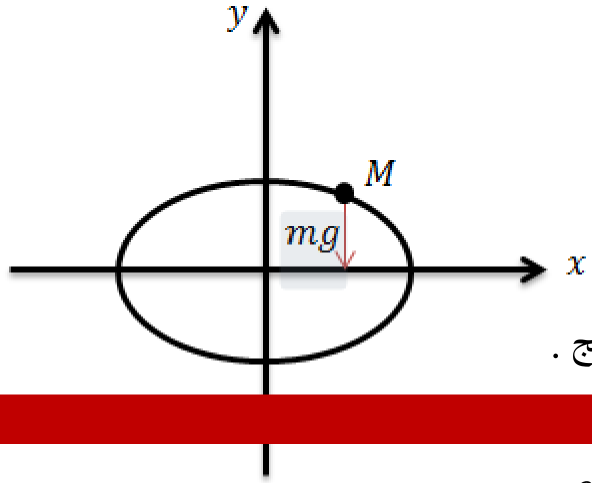
$$m(x'', y'', z'') = -m\lambda^2 x\vec{\imath} - m\lambda^2 y\vec{\jmath} + m\omega^2 x\vec{\imath} + m\omega^2 y\vec{\jmath} + 2m\omega y'\vec{\imath} - 2m\omega x'\vec{\jmath}$$

$$mx'' = -m\lambda^2 x + m\omega^2 x + 2m\omega y' \Longrightarrow x'' = -\lambda^2 x + \omega^2 x + 2\omega y'$$

$$my'' = -m\lambda^2 y + m\omega^2 y - 2m\omega x' \Longrightarrow y'' = -\lambda^2 y + \omega^2 y - 2\omega x'$$

$$mz'' = R - mg = 0$$

تمرين (6) إضافي



ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي
صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك
لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية
متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب
أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية
M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت
في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .

الحل

نعلم أن معادلات القطع الناقص هي : $y = b.\sin\theta$, $x = a.\cos\theta$

نعلم أن معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial(T+u)}{\partial q_j} = 0$

القوة الجاذبة مركزية $F_1 = -m\,\lambda^2 r$ ، وقوة الثقل $P = mg$

ونعلم أن الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2)$ $\quad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$y' = b\cos\theta\,.\,\theta'$, $x' = -a\sin\theta\,.\,\theta'$

ومنه السرعة النسبية $\boxed{v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\,\theta'^2 + b^2.\cos^2\theta\,.\,\theta'^2}$ $\Leftarrow$ $v_r^2 = x'^2 + y'^2$

والسرعة الجرية $\vec{v_e} = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x\vec{k}$

$\vec{v_e} = -\omega\, a\cos\theta\,.\,\vec{k} \Rightarrow \boxed{v_e^2 = \omega^2.a^2.\cos^2\theta}$

بتعويض في قانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m[(a^2.\sin^2\theta + b^2.\cos^2\theta).\theta'^2 + \omega^2.a^2.\cos^2\theta]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = m(a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta\,.\sin\theta)\theta'^2 - \omega^2a^2\cos\theta\,.\sin\theta$$

القوة M تخضع لقوتين((u_1 هي قوة الثقل و u_2 قوة الجذب)) واخذنا الثقل سالب لانه عكس دوران oy

$$u_1 = -\int mg\ dy = -mgy \Longrightarrow u_1 = -mgb\sin\theta$$

$$u_2 = -\int m\lambda^2 r.dr \Longrightarrow u_2 = -m\lambda^2\frac{r^2}{2}$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}oM^2 \Longrightarrow u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(x^2+y^2)$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(a^2.\cos^2\theta + b^2.\sin^2\theta)$$

$$u = u_1 + u_2 \Longrightarrow \boxed{u = -mgb\sin\theta - \frac{m\lambda^2}{2}(a^2.\cos^2\theta + b^2.\sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = -mgb.\cos\theta + m\lambda^2 a^2.\cos\theta.\sin\theta - m\lambda^2 b^2\sin\theta\cos\theta$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta'' = (a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta.\sin\theta)\theta'^2$$
$$-\omega^2a^2\cos\theta.\sin\theta - gb.\cos\theta + \lambda^2a^2.\cos\theta.\sin\theta - \lambda^2b^2\sin\theta\cos\theta)$$

تمرين (7) إضافي

لتكن M نقطة مادية كتلتها m ثقلها مهمل ملازمة بدون احتكاك للمحور ox يدور في مستوي ثابت بدوران منتظم سرعته ω يؤثر في M قوة مركزية دافعة متناسبة عكساً مع مربع البعد عن المركز.

أكتب معادلات الحركة اعتماداً على معادلات لاغرانج .

الحل

M نقطة تتحرك على ox والمستوي يدور حول oz ، وبالتالي عندنا درجة حرية واحدة .

من عبارة الطاقة الحركية نجد ... $T = \frac{1}{2}mv_a^2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2)$

السرعة النسبية هي $v_r = x' + y' \Longrightarrow v_r = x' \Longrightarrow \boxed{v_r^2 = x'^2}$

حيث $y' = 0$ لان الحركة فقط على المحور ox

والسرعة الجرية هي
$$v_e = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x\omega\vec{j} \Longrightarrow \boxed{v_e^2 = x^2\omega^2}$$

ومنه $v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 \Longrightarrow v_a^2 = x'^2 + x^2\omega^2$

وبتعويض بقانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(x'^2 + x^2\omega^2)}$$

وبما أن القوة دافعة متناسبة عكساً مع مربع البعد فإنها من الشكل :

$$F = \frac{m\lambda^2}{x^2}r \Longrightarrow u = \int \frac{m\lambda^2}{x^2}r\,.dx$$

$$u = m\lambda^2 r \int x^{-2}\,dx \Longrightarrow \boxed{u = -m\frac{\lambda^2}{x}r}$$

نعلم أن معادلة لاغرانج هي : $\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{\partial(T+u)}{\partial x}$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial x'} = mx'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\lambda^2}{x^2}r$$

وبالتعويض في معادلات لاغرانج نجد :

$$mx'' = m\left(\omega^2 x + \frac{\lambda^2}{x^2}r\right) \Longrightarrow \boxed{x'' = \omega^2 x + \frac{\lambda^2}{x^2}r}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ، لحلها نضرب الطرفين بـ ($2x'$) وبالتالي نحصل على معادلة الحركة .

تمرين (8) إضافي

M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m تتحرك على المنحني $y = \sqrt{x}$ حيث oy شاقولي صاعد
أكتب معادلات تكامل الطاقة الحركية للنقطة المادية M ثم احسب السرعة للنقطة M في الموضع (o)
علماً ان النقطة تركت في الموضع $x = 1$ بدون حركة ابتدائية .

الحل

نعلم أن عبارة تكامل الطاقة هي $T = u + h$

وعبارة الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2)$

$$y = \sqrt{x} \Longrightarrow y^2 = x \Longrightarrow x' = 2yy' \Longrightarrow x'^2 = 4y^2y'^2$$

$$v^2 = x'^2 + y'^2 \Longrightarrow v^2 = (4y^2y'^2 + y'^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(4y^2y'^2 + y'^2) \Longrightarrow T = \frac{1}{2}my'^2(4y^2 + 1)$$

$$u = -\int mg.dy \Longrightarrow u = -mgy$$

ومنه بالتعويض في قانون تكامل الطاقة الحركية نجد :

$$\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1) = -mgy + h \ldots\ldots (1)$$

من شروط البدء $x = 1$ من نص المسألة وبتعويضها بـ $y = \sqrt{x}$ نجد $y = 1$

$$0 = -mg + h \Longrightarrow h = mg$$

وبالتالي بالتعويض بالعلاقة (1) نجد.. $\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1) = -mgy + mg$

$$\frac{1}{2}my'^2(4y^2+1) = mg(-y+1) \Longrightarrow \frac{1}{2}y'^2(4y^2+1) = g(-y+1)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = g(-y+1) \Longrightarrow v^2 = 2g(-y+1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{2g(-y+1)}}$$

وهي سرعة النقطة المادية .

أسرة سيريا ماث تتمنى لكم امتحاناً موفقاً سائلين الله التوفيق لنا ولكم....وتأمل بأن تكون قد أدت مهمتها على أكمل وجه بتبسيط وتوضيح فقرات المقرر ...فإن احسنا فمن الله وإن أخطأنا فمن أنفسنا ومن الشيطان.... راجين منكم الدعاء .

" وكل عام وأنتم بألف خير "

انتهت المقرر

إعداد : محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي