◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة :السادسة عنوان المحاضرة : الفضاءات

سنتعرف في هذه المحاضرة على :

١ـتركيب الدوال المستمرة بالإضافة إلى مبرهنتين.

٢ـ جمع وضرب وقسمة الدوال و مبرهنة القيم الوسطى و بعض التعاريف والنتائج.

٣ـ الاستمرار المنظم وبعض الأمثلة.

**مبرهنة:** لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $x_0 \in S \cap S'$ عندها:

$$f \text{ مستمر في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**الإثبات:** لنفرض أن $f$ مستمرة عند $x_0$ عندئذٍ تحقق أنّ:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: ||x - x_0|| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

لكن $x_0 \in S'$ أي $x_0$ نقطة حدية $x \neq x_0$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < ||x - x_0|| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

و بالعكس ، لنفرض أن $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, ||x - x_0|| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

نميز حالتين:

أ) $x = x_0$ في هذه الحالة يكون $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

ب) $x \neq x_0$ في هذه الحالة مباشرةً $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ حيث $||x - x_0|| < \delta$

**نتيجة:** إذا كانت $x_0$ نقطةحدية لـ $S$ و الدالة $f$ مستمرة عندها فإن:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

**انتبه:** لا نستطيع استخدام المبرهنة السابقة إلا إذا كانت النقطة حدية و تنتمي لساحة التعريف.

**تنويه :**

**وجدنا في المحاضرة السابقة أن :**

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{[x^2 + (y-2)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} - 1}{x^2 + (y-2)^2} & : (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

ولكنها غير مستمرة عند $(0,2)$ لأن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq f(0,2) = 0$$

إذاً الدالة $f$ غير مستمرة .

**مبرهنة:**

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ولتكن $x_0 \in S$ بحيث $x_0$ غير حدية لـ $S$ أي $x_0 \in S \backslash S'$ (أي $x_0$ منعزلة)

عندئذٍ تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0$.

**الإثبات:** نفرض جدلاً أن $f$ غير مستمرة عند $x_0$ أي:

$$\exists\ \varepsilon > 0, \forall \delta > 0: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

نميز حالتين: أ) $x = x_0$ ، $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ و هذا يناقض كون $\varepsilon > 0$.

ب) $x \neq x_0$ و بالتالي يكون أي جوار لـ$x_0$ يتقاطع مع $S$ بنقاط مختلفة عن $x_0$

$\Leftarrow x_0$ نقطة حدية وهذا يناقض الفرض بأنها غير حدية

أي أن $f$ مستمرة عند $x_0$.

**مبرهنة:**

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مستمرة في $x_0$.

و $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ مستمرة في $x_0$.

حيث $x_0 \in S \cap T$ عندئذ:

$$1)\ f + g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في $x_0$.

$$2)\ f\,.\,g: S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في $x_0$

$$3)\ \frac{f}{g}: S \cap T \backslash \{x: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

تكون مستمرة في $x_0$

٤) تركيب دوال مستمرة هو دالة مستمرة أي:

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

مستمرة في $x_0$ مستمرة في $f(x_0)$

عندئذٍ تركيبهم رمزه $h$ حيث

$h = fog : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة.

**مبرهنة القيمة الوسطى:(دون برهان)**

لتكن $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة على $S$ و $S$ مجموعة مترابطة، ولتكن $\alpha \in \mathbb{R}, x, y \in S$

حيث $f(x) < \alpha < f(y)$

عندئذ: $\exists \beta \in S\,, f(\beta) = \alpha$

**تذكرة :**

ليكن $A \subseteq \mathbb{R} \neq 0$

١) نقول عن $A$ أنها محدودة من الأعلى إذا تحقق :

$$\forall x \in A\,, \exists m \in \mathbb{R} : x \leq m$$

٢) نقول عن $A$ أنها محدودة من الأدنى إذا تحقق :

$$\forall x \in A\,, \exists m \in \mathbb{R} : x \geq m$$

٣) نقول عن $A$ أنها محدودة $\Leftrightarrow$ من الأعلى ومن الأدنى إذا تحقق :

$$\forall x \in A , \exists B > 0℃ : |x| < B$$

٤) العنصر الأعظمي $max$ : ليكن $\alpha = max\, A$ عندئذ : $\alpha$ حد أعلى وينتمي للمجموعة $A$

٥) العنصر الأصغري $min$ : ليكن $\beta = max\, A$ عندئذ : $\beta$ حد أعلى وينتمي للمجموعة $A$

٦) أصغر حد أعلى $sup$ : ليكن $\alpha = sup\, A$ عندئذ : $\alpha$ حد أعلى

إذا وجد حد أعلى أخر وليكن $l$ فإن $\alpha < L$ أو عن طريق التعريف :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists x_0 \in A ; x_0 > \alpha - \varepsilon$$

٧) أكبر حد أعلى $imf$ : ليكن $\beta = sup\, \mathrm{A}$ عندئذ : $\beta$ حد أدنى

إذا وجد حد أدنى أخر وليكن $K$ فإن $\beta > K$ أو عن طريق التعريف

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists x_0 \in A ; x_0 > \beta + \varepsilon$$

**تعريف:** لتكن $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

١. نقول عن الدالة $f$ أنها محدودة من الاعلى اذا كانت مجموعة قيمها $f(x)$ محدودة من الاعلى.

$$\forall \mathrm{x} \in s , \exists k_1 \in \mathbb{R} : f(x) \le k_1$$

٢. نقول عن الدالة $f$ أنها محدودة من الادنى اذا كانت مجموعة قيمها $f(S)$ محدودة من الادنى.

$$\forall \mathrm{x} \in s , \exists k_2 \in \mathbb{R} : f(x) \ge k_2$$

٣. نقول عن الدالة $f$ أنها محدودة اذا كانت مجموعة قيمها $f(S)$ محدودة من الاعلى ومن الادنى.

$$\forall \mathrm{x} \in s , \exists k > 0 : |f(x)| \le k$$

٤. تعريف ال $max$ و $min$ لمجموعة قيم دالة $f$ :

$$\forall x \in s , \exists x_0 \in s , f(x) \le f(x_0) \underset{\text{عندئذ}}{:} max\, f(x) = f(x_0) ; x_0 \in s$$

$$\forall x \in s , \exists x_1 \in s , f(x_1) \le f(x) : min\, f(x) = f(x_1) ; x \in s$$

٥. تعرف ال $sup$ و $imf$ :

إذا كانت $f$ دالة حقيقية ومحدودة عندئذ يوجد لمجموعة قيمة $sup$ و $imf$ وذلك لأن مجموعة قيم الدالة هي مجموعة جزئية من $I$ وبما أن $f$ محدودة فهذه المجموعة محدودة وجزئية من $\mathbb{R}$ فهي تتصف بخاصة أكبر حد أدنى وأصغر حد أعلى ومنه يوجد لمجموعة القيم $sup$ و $imf$

## تعريف الاستمرار بانتظام ( المنتظم ) :

نقول عن الدالة $f:S\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ بأنها مستمرة بانتظام على S إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall\varepsilon>0\,;\,\exists\delta_\varepsilon>0:\forall\underbrace{x_1,x_2}_{\text{متحولين}}\epsilon S\;:\;\|x_1-x_2\|<\delta\Longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

أي: ١- إذا كانت $f$ مستمرة بانتظام على $s$ ⟸ $f$ مستمرة على $s$

٢- إذا كانت $f$ غير مستمرة ⟸ $f$ غير مستمرة بانتظام.

**مثال** :

لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$x\longmapsto f(x)=x^2$$

حل الدالة مستمرة بانتظام على المجال $[0.1]$

**الحل :**

$$\forall\varepsilon>0\,;\,\exists\delta_\varepsilon>0:\forall x_1,x_2\epsilon[0.1]\;:\|x_1-x_2\|<\delta$$
$$\Longrightarrow|{x_1}^2-{x_2}^2|<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow|{x_1}^2-{x_2}^2|=|x_1-x_2||x_1+x_2|<\delta|x_1+x_2|$$

لكن

$$\left.\begin{array}{l}0\le x_1\le 1\\[2ex] 0\le x_2\le 1\end{array}\right\}\qquad x_1+x_2\le 2$$

ومنه نجد أن :

إذاً نختار $2\delta=\varepsilon$

$$|{x_1}^2-{x_2}^2|<\delta|x_1+x_2|\le 2\delta$$
$$\forall x_1,x_2\in[0,1]\;:\;|{x_1}^2-{x_2}^2|<\varepsilon$$

ومنه نجد أن $f$ مستمرة بانتظام على المجال $[0,1]$

**نتائج :**

١- إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجموعة متراصة ⟸ $f$ مستمرة بانتظام و هي محدودة أي تملك الدالة $f$ حدها الأعظمي وحدها الأصغري

٢- تركيب دوال مستمرة بانتظام هي دالة مستمرة بانتظام.

**مثال :**

لنأخذ الدالة

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 + x - 1$$

هل $f$ مستمرة بانتظام .

إن $[-1,1]$ مجموعة مغلقة ومحدودة ومتراصة والدالة $x^2 + x - 1$ هي دالة مستمرة سواء كان (جمع ، ضرب ، طرح) إذن $f$ دالة مستمرة على مجموعة متراصة $[-1,1]$ فهي مستمرة بانتظام .

**تمرين :**

لتكن لدينا $f : \mathbb{R} \quad \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$$

أثبت أن $lim_{(x,y) \to f(0,0)} f(x, y) = 0$ حسب التعريف :

الحل :

إن النقطة $(0,0)$ حدية

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||(x, y) - (0,0)|| < \delta \Rightarrow \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} - 0\right| < \varepsilon$$

لننطلق من

$$\left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}\right| = |x^2 + y^2| . \left|\sin \frac{1}{xy}\right| \leq \underbrace{|x^2 + y^2| < \delta^2 = \varepsilon}_{\text{لأن}}$$

$$\|(x, y) - (0,0)\| = \|x, y\| = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon}_{x^2+y^2<\varepsilon^2 \ \text{بالتربيع}}$$

وبالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} > 0 \, , ||(x, y)|| < \delta \Rightarrow \left|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}\right| < \varepsilon$$

إذاً $lim_{(x,y) \to f(0,0)} f(x, y) = 0$

## تمرين:

ادرس استمرار الدالة $f$ في النقطة $(0,0)$ حيث :

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y)\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

## الحل:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^4}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

لدينا:

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{x^2+y^2} = \frac{x^2.x^2}{x^2+y^2}$$

$$\underset{(x^2 \leq x^2+y^2 \text{ حيث})}{\leq} \frac{x^2.(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 < x^2+y^2 < \delta^2$$

نختار $\delta^2 = \varepsilon$ ومنه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon} : ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)| < \varepsilon$$

أي أن $f$ مستمرة عند $(0,0)$.

---

**انتهت المحاضرة**

إعداد: كمال الرفاعي_محمد أنس القزاز_سارة شهاب

تنسيق: ولاء الأخضر♥