نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الحادية عشرة

◄ عنوان المحاضرة: حل تمارين

سنقوم في هذه المحاضرة بحل مجموعة من التمارين لإنهاء البحث الثاني و ذلك تمهيداً لأن نبدأ في المحاضرة القادمة ببحث جديد

التمرين الأول: لتكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{2}{3}}$$

حد من بين المشتقات :

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{e}}(0,0), \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{e}}(0,1)$$

ما كان موجوداً منها حيث:

$$\mathrm{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

الحل

$$\boldsymbol{\| \mathrm{e} \| = \| \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1 \Rightarrow \| e \| = 1}$$

و الآن لنحسب المشتقات الاتجاهية ((إن $\|e\| = 1$))

$$\frac{\partial f}{\partial e}(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+he) - f(c)}{h} \quad ; c = (0,0)$$

$$c + he = (0,0) + h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right)$$

نعوض :

$$\frac{\partial f}{\partial e}(c) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و بشكل مماثل :

$$\frac{\partial f}{\partial e}(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+he)-f(c)}{h}\quad ;c=(0,1)$$

$$c+he=(0,1)+h\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h,1+\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)$$

$$f(c+he)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h,1+\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h+1\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,1)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h+1\right)^{\frac{2}{3}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)\right)}{h.h^{-\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)\right)}{h^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}h}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\infty$$

أي **النهاية غير موجودة**...😜

التمرين الثاني: لتكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & :(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & :(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

١- برهن أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$.

٢- أثبت أن f_x, f_y ليسا مستمرين في جوار الصفر.

الحل

إن $\mathbb{R}^2$ مفتوحة:

$\boxed{1}$- عندما $(x,y) \neq (0,0)$ عندئذٍ:

$$f_x(x,y) = 2x\,sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\left(cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(-\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= 2x\,sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

◀**ملاحظة** إن مجموع وجداء وتركيب دوال مستمرة هو "دالة مستمرة".

إذاً f_x موجودة ومستمرة من أجل أي نقطة $(x,y) \neq (0,0)$.

بنفس الطريقة:

$$f_y(x,y) = 2y\,sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

إذاً f_y موجودة ومستمرة من أجل أي نقطة $(x,y) \neq (0,0)$.

بالتالي: فالدالة f قابلة للاشتقاق من أجل أي نقطة $(x,y) \neq (0,0)$.

$\boxed{2}$- أما عند $(x,y) = (0,0)$ فتعطى بالدستور التالي:

$$f\left(\underbrace{h}_{x},\underbrace{k}_{y}\right) - f(0,0) = hf_x(0,0) + kf_y(0,0) + \mu\sqrt{h^2+k^2} \ldots (*)$$

لنحسب:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\,sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\,sin\frac{1}{h^2} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\,sin\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\,sin\frac{1}{h^2} = 0$$

والآن لنعوض في العلاقة $(*)$:

$$(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}-0=h.(0)+k.(0)+\mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{h^2+k^2}.\sin\frac{1}{h^2+k^2}\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}(0,0)$$

إذاً fقابلة للاشتقاق في النقطة $(x,y)=(0,0)$.

وبالتالي من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ فإن fقابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}^2$ ...

- وبهذا نكون قد انتهينا من الطلب الأول لننتقل سوياً إلى الطلب الثاني:

" أثبت أن f_x,f_y ليسا مستمرين في جوار الصفر."

$$f_x(x,y)=\begin{cases}0\,;(x,y)=(0,0)\\ 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\,;(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

إن $c=(0,0)$ حدية.

$$\lim_{h\to0}f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h\sin\frac{1}{h^2}-\frac{2h}{h^2}\cos\frac{1}{h^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(2\sin\frac{1}{h^2}-\frac{2}{h^2}\cos\frac{1}{h^2}\right)=-\infty$$

إن f_x غير محدودة وبالتالي غير مستمرة في جوار $(0,0)$ لأن:

$$\lim_{h\to0}f_x(0,0)\neq f_x(0,0)$$

- وبنفس الطريقة لنتحقق من f_y :

$$f_y(x,y)=\begin{cases}o\,;(x,y)=(0,0)\\ 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\,;(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{h\to0}f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(2h\sin\frac{1}{h^2}-\frac{2h}{h^2}\cos\frac{1}{h^2}\right)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2h\sin\frac{1}{h^2}}{h} - \frac{\frac{2h}{h^2}\cos\frac{1}{h^2}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(2\sin\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h^2}\cos\frac{1}{h^2}\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f_y(0,0) \neq f_y(0,0)$$

إذاً f_y غير محدودة وبالتالي غير مستمرة في جوار $(0,0)$.

وعليه يكون كلاً من f_y , f_x غير مستمرين في جوار الصفر...☹

التمرين الثالث: ليكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = log(1 + x_1 + 2x_2 + \ldots\ldots + nx_n)$$

أوجد $d_c(x-c)$ حيث $c(0,0\ldots\ldots 0)$.

الحل

$$x - c = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) - (0,0,\ldots,0) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$
$$d_c f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = x_1 f_{x_1}(c) + x_2 f_{x_2}(c) + \ldots\ldots + x_n f_{x_n}(c)$$

سنحسب المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_1 ثم نعوض النقطة :

$$f_{x_1}(x) = \frac{1}{1 + x_1 + 2x_2 + \ldots\ldots + nx_n} \Rightarrow f_{x_1}(c) = 1$$

و بشكل مماثل نجد أن :

$$f_{x_2}(x) = \frac{2}{1 + x_1 + 2x_2 + \ldots\ldots + nx_n} \Rightarrow f_{x_2}(c) = 2$$

$$f_{x_2}(c) = 2, f_{x_3}(c) = 3, \ldots\ldots, f_{x_n} = n$$
$$\Rightarrow \boxed{d_c f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \ldots\ldots + nx_n}$$

و هو المطلوب ...❤

التمرين الرابع: ليكن لدينا الدالة:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = ||x||^{2r}$$
$$c(1,1,\ldots\ldots 1)$$

أوجد $d_c f(x-c)$.

الحل

$$x - c = (x_1, x_2, \dots, x_n) - (1,1,\dots,1) = (x_1 - 1, x_2 - 1, \dots\dots, x_n - 1)$$
$$d_c f(x_1 - 1, \dots, x_n - 1) = (x_1 - 1) f_{x_1} + (x_2 - 1) f_{x_2} + \cdots + (x_n - 1) f_{x_n}$$

و لنحسب المشتقات :

لدينا :

$$f(x) = \|x\|^r = \left(\sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \dots\dots + x_n^2}\right)^r = (x_1^2 + x_1^2 + \dots\dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}}$$

نشتق :

$$f_{x_1}(c) = \frac{r}{2}(2x_1)(x_1^2 + x_1^2 + \dots\dots + x_n^2)^{\frac{r}{2}-1} \Rightarrow f_{x_1}(c) = 2r(n)^{r-1}$$

بنفس الاسلوب نجد أن :

$$f_{x_2}(c) = r(n)^{\frac{r}{2}-1}$$

و هكذا حتى نجد أن:

$$f_{x_n}(c) = r(n)^{\frac{r}{2}-1}$$

نعوض:

$$\Rightarrow d_c f(x - c) = 2rn^{r-1}[\, x_1 - 1 + x_2 - 1 + \cdots + x_n - 1\,]$$
$$= r(n)^{\frac{r}{2}-1}[\, x_1 + x_2 + \dots + x_n - n] = r(n)^{\frac{r}{2}-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right]$$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي_رهف النقشي_سارة شهاب