◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الحادية عشر

◄ عنوان المحاضرة: التكامل العقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مجموعة تمارين
2- التكامل العقدي والمنحني العقدي

مثال5: $0 \le t \le 3\pi \quad \gamma_4(t) = e^{it}$

نلاحظ أن $\gamma_4(3\pi) = -1 \quad , \quad \gamma_4(0) = 1$

حيث سيمسح دائرة الواحدة مرة واحدة و من ثم يعود ليمسح القسم العلوي (أي أنه سيقطع دورة و نصف الدورة) على دائرة الواحدة

و هنا هو ليس منحنٍ مغلق لأن صورة البداية لا تنطبق على صورة النهاية

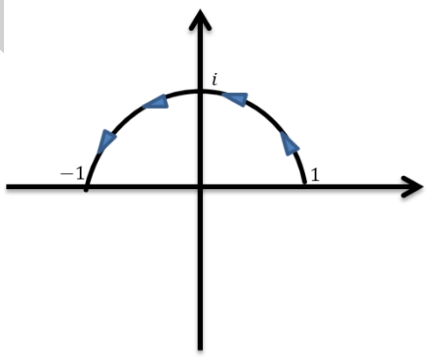
مثال 6: $-1 \le t \le 1 \quad : \quad \gamma_5(t) = -t + i\sqrt{1-t^2}$

لدينا $x = -t$ و أيضاً $y = \sqrt{1-t^2}$ و بالتالي نلاحظ أنّ: $x^2 + y^2 = t^2 + (1-t^2) = 1$

و هذا يبين أن حامل المنحني المُمَثل بالتابع $\gamma_5(t)$ هو دائرة الواحدة و لما كانت $y \ge 0$ (يساوي جذر لعدد حقيقي موجب) فإن نقاط المنحني واقعة على القسم العلوي من هذه الدائرة

أما بالنسبة لـ x فعندما t تمسح المجال $[-1,1]$ من -1 إلى 1 فهي تمسح المجال $[-1,1]$ من 1 إلى -1

الخلاصة : سيكون المنحني الناتج هو نصف دائرة الواحدة العلوي ممسوح من $x = 1$ وحتى $x = -1$ كما هو موضح بالشكل :



المنحني البسيط

نقول عن منحنٍ Γ إنه بسيط إذا لم يمر من أي نقطة من نقاطه أكثر من مرة واحدة

ويمكن أن نسمي المنحنِي مغلق بسيطاً إذا كانت جميع نقاطه بسيطة باستثناء نقطة البداية و النهاية فإنها حتماً ستكون مضاعفة من المرتبة الثانية .

و كلامنا السابق يكافئ أن المحني البسيط يكون تمثيلاً للتابع :

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$$

بحيث يكون متباين على المجال $[a,b]$ في حال كان مفتوحاً
و متبايناً على المجال $]a,b]$ أو $[a,b[$ في حال كان مغلقاً

تعريف : نقول عن منحنٍ Γ إنه من الصف C^1(أو C_1) إذا كان أحد تمثيلاته الوسيطية ينتمي إلى الصف C^1 أي أنه قابل للاشتقاق من المرتبة الأولى و مشتقه مستمر على منطلقه.

مثال : إن المنحني $C^+(a,r)$ حيث a ثابت عقدي و r ثابت حقيقي موجب تماماً هو من الصف C^1 حيث أنها دائرة نصف قطرها r و مركزها a ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة)

الإثبات :

لدينا تمثيل وسيطي لهذا المنحنى $\gamma(t) = a + re^{it}$ حيث $0 \leq t \leq 2\pi$

إن γ قابل للاشتقاق على $[0,2\pi]$ و أنّ: $\forall t \in [0,2\pi]$, $\gamma'(t) = ire^{it}$ مشتق مستمر على كامل المجال المعطى ، و بالتالي إن المنحني الممثل بالتابع γ هو منحنٍ من الصف C^1.

ملاحظة : إذا طلب منا تعيين منحني ممثل لـ $\gamma(t)$ نأخذ:

$$|\gamma(t) - a| = |re^{it}|$$
$$|\gamma(t) - a| = r$$

مثال: ليكن $0 \leq t \leq 1$: $\gamma(t) = t + it^2$ عندها نلاحظ أن $y = t^2$, $x = t$ و بالتالي $y = x^2$ و بالتالي هي معادلة قطع مكافئ ذروته المبدأ و محوره محور التراتيب .

هي معادلة قطعة مستقيمة يجب حفظ صيغتها و الانتباه لمجال قيم t
حيث إذا كانت $0 \le t \le 1$ حصلنا على قطعة مستقيمة
أما عندما $t \in R$ نحصل على كامل المستقيم (غير المحدود ببداية ولا بنهاية)

مثال: أثبت أن أي قطعة مستقيمة موجهة هي منحني عقدي في الصف C^1

لتكن z_2, z_1 بداية و نهاية القطعة المستقيمة على الترتيب و نعلم أن تمثيل القطعة المستقيمة وسيطياً يعطى بالشكل:

$$\boxed{\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2}$$

و ذلك عندما يكون $0 \le t \le 1$

إن γ هو ممثل يمسح القطعة المستقيمة $[z_1 z_2]$ و إن γ قابل للاشتقاق على المجال $[0,1]$ كما أن : $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ هذا يعني أن مشتق هذا التابع هو تابع ثابت إذ يقرن كل عدد حقيقي من المجال $[0,1]$ بالعدد العقدي الثابت $z_2 - z_1$ فهو تابع مستمر على $[0,1]$ و هذا يعني أن γ من الصف C^1 بالنتيجة $[z_1 z_2]$ منحني من الصف C^1

ملاحظة : إن كل قطعة مستقيمة موجهة هي منحنٍ بسيط

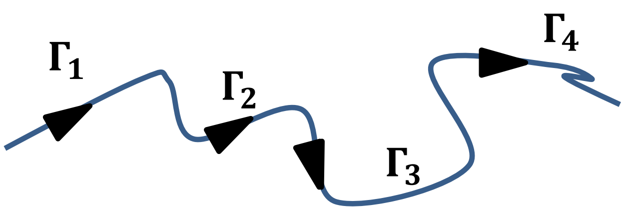
تعريف: نقول عن منحنٍ Γ إنه من الصف C^1 قطعياً إذا كان مؤلفاً من عدد منتهٍ من القطع (المنحنيات) المتتالية و التي كل منها منحن من الصف C^1 .

إذا كان لدينا متتالية من المنحنيات $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ تشكل المنحني Γ فإننا نرمز لذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n}$$

ولا نقصد بذلك جمعاً للمنحنيات ، و إنما مجرد رمز

مثلاً:



و بالتالي يمكن أن نكتب هنا : $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$ و من الصف C^1 قطعياً

تعريف :(المنحني الأملس):ـ نقول عن منحنٍ Γ إنه أملس إذا وجد ممثل وسيطي :

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

ممسوح به ، و يحقق الشروط التالية :

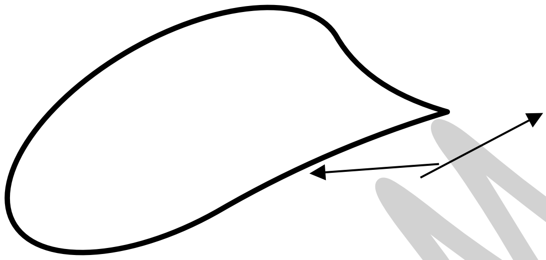
1- للتابع γ مشتق مستمر على $[a, b]$

2- $\gamma'(t) \neq 0 \quad , \quad \forall t \in [a, b]$

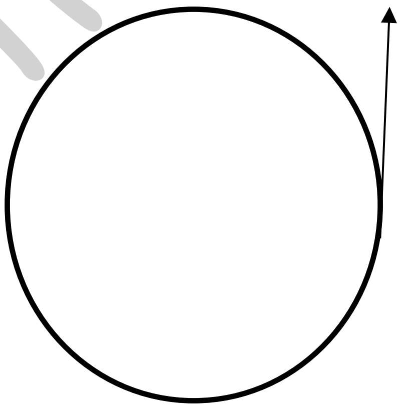
3- التابع γ متباين على المجال $[a, b]$ إذا كان Γ مفتوحاً و على المجال $[a, b[$ إذا كان Γ مغلقاً و $\gamma'(a) = \gamma'(b)$

التفسير: إن الشرطين الأول و الثاني يبينان أنه يوجد مماس للمنحني عند كل نقطة من نقاطه و هذا المماس يتغير بشكل مستمر دون أن يقفز عن أي نقطة

أما الشرط الثالث فيعني أنه عندما يكون المنحني مغلق فإن المماس عند نقطة النهاية و البداية هو ذاته



$\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$



$\gamma'(a) = \gamma'(b)$

تذكر أن قيمة المشتق تعبر عن ميل المماس عند تلك النقطة ..
بالتالي عدم تساوي قيمتي المشتق عند a, b علماً أن صورة a تنطبق على صورة b فهذا يعني وجود مماسين بميلين مختلفين للمنحني عند تلك النقطة

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل–احمد أبو التوت–نذير تيناوي