نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة الثامنة عنوان المحاضرة : السرعة السطحية ودساتير بينيه

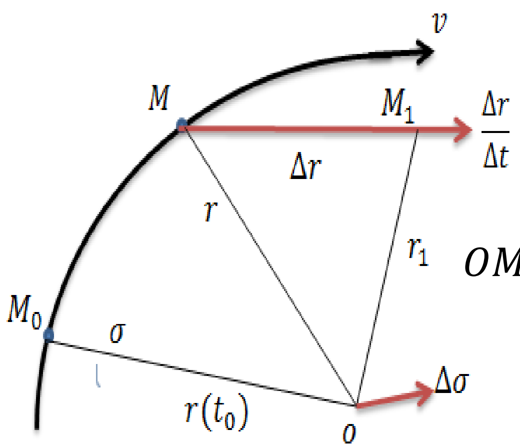
بسم الله وبالله المستعان . . .لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي بها السرعة السطحية ودساتير بينيه وأمثلة عليها .

السرعة السطحية

لتكن M نقطة مادية تتحرك وفق المعادلات التالية :

$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t)\quad ,\quad z = z(t)\quad ; r = r(t)$$

عندما يتحرك نصف قطر الشعاعي r المحدد لوضع نقطة مادية ثابتة في الفراغ فإنه يرسم مخروطاً يتم توجيهه بواسطة مسار النقطة المتحركة .
نرمز لقيمة السطح OMM_0 المحدد بالمسار وبنصفي القطرين الشعاعيين $r(t), r(t_0)$ ونرمز له بالرمز σ ، لنفرض أن النقطة المتحركة كانت بالموضع M المحدد بنصف القطر الشعاعي r أما في اللحظة الزمنية $(t+\Delta t)$ فلنفترض أنها وصلت إلى الموضع M_1 بنصف القطر الشعاعي r_1 عندئذٍ إذا كانت Δt صغيرة فأنه يمكن اعتبار تغير سطح $\Delta\sigma$ خلال الفترة Δt كشعاع يقدر بالسطح المستوي OMM_1 أي كشعاع طوله نصف سطح متوازي الأضلاع المنشأ على $r, \Delta r$. أما اتجاهه يتحدد بالمساواة الشعاعية لجداء الشعاعين



$$\Delta\sigma = OMM_1 = \frac{1}{2}(r\times\Delta r)\ \ldots\ldots(3)$$

وبالتالي نهاية نسبة التغير

$$\boxed{u = \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{أو} \quad lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \vec{u}}$$

بالإسقاط على الإحداثيات الديكارتية نحصل على مساقط السرعة السطحية $\vec{u}$.

$$2\vec{u} = \vec{r}\times\vec{v}\ \ldots\ldots(4)$$

وهذه العلاقة عبارة عن عزم سرعة النقطة المادية بالنسبة لمركزه بمعنى آخر ضعف السرعة السطحية بالنسبة لمركز ما يساوي عزم يساوي عزم سرعة هذه النقطة بالنسبة لنفس المركز

وبالتالي يتضح أن السرعة السطحية تتعلق بالمركز المختار وبالتالي بفرض أن o مركز الاحداثيات الديكارتية للنقطة المادية بأخذ مساقط السرعة نجد :

$$2\vec{u} = 2\frac{d\sigma}{dt} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \dots\dots (5)$$

من المحدد نحصل على :

$$2u_x = z'y - zy' \quad , \quad 2u_y = zx' - z'x \quad , \quad 2u_z = xy' - x'y$$

وهي معادلات السرعة السطحية بالإحداثيات الديكارتية

سؤال على الفقرة السابقة ((أوجد معادلات السرعة السطحية بالإحداثيات الديكارتية))

في حالة خاصة إذا كانت نقطة مادية تتحرك في المستوي (oxy) وبالتالي إذا عوضنا $z = 0$ في هذه المعادلات نحصل على السرعة السطحية في هذا المستوي وتكون من الشكل :

$$2u_z = xy' - x'y \dots\dots (6)$$

وبالتالي إذا كانت الحركة مستوية تعطى بهذا الشكل في الاحداثيات الديكارتية فإنه يمكننا الحصول على (r, φ)

$$d\sigma = oMM' = \frac{1}{2} r . r d\varphi = \frac{r^2}{2} d\varphi$$

وبالتالي القيمة العددية للسرعة السطحية للإحداثيات القطبية بالنسبة للمركز o تعطى بالشكل :

$$u = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{r^2}{2} \varphi' \dots\dots (7)$$

وبالتالي حالة خاصة إذا كانت الحركة مستوية والسرعة السطحية ثابتة في مثل هذه الحالة نقول أن الحركة خاضعة لقانون السطوح بما أن الحركة مستوية والسرعة سطحية تعطى المساوة (6) أو المساوة (7) إذا أخذت الإحداثيات القطبية وبالتالي الحركة الخاضعة لقانون السطوح تحدد بإحدى العلاقتين التاليتين

$$u = \frac{1}{2}(xy' - x'y) = C \qquad \text{أو} \qquad \frac{r^2}{2}\varphi' = C$$

حيث C ثابت السطوح .

الحركة المركزية

لتكن M نقطة مادية كتلتها m خاضعة لقوة F يمر خط تأثيرها من نقطة ثابتة (o) مثل هذه القوة تدعى بالقوة المركزية .

$$\vec{r}\wedge\vec{F}=0\Rightarrow\overrightarrow{oM}\wedge\vec{F}$$

تتحقق هذه العلاقة إذا كانت : $F=0$ مجموعة القوة المؤثرة تساوي الصفر أو $(\vec{r}//\vec{F})$ ((أي أن تأثير القوة يمر من المركز وتسمى قوة مركزية)) ، النقطة المادية خاضعة لقوة مركزية أو لمجموعة من القوة محصلتها قوة مركزية تكون لدينا :

$$\frac{d}{dt}=(\vec{r}\wedge m\vec{v})=0\Rightarrow\vec{r}\wedge m\vec{v}=const$$

وبالتالي هذه الصيغة تبين لنا إذا خضعت النقطة المادية لقوة مركزية فإن عزمها الحركي يكون مقدار ثابتاً ،لا يتغير مع مرور الزمن وبما أن الكتلة ثابتة نستطيع أن نكتب :

$$\Rightarrow\vec{r}\wedge\vec{v}=const\ldots..(1)$$

ومن هذه العلاقة يتضح لنا أن مسار النقطة المادية الخاضعة لتأثير قوة مركزية تكون في مستوي وبالإضافة لذلك تكون حركة هذه النقطة المادية خاضعة لقانون السطوح ويمكن التعبير عن القانون بالمعادلة $\vec{r}\wedge\vec{v}=2\frac{d\sigma}{dt}=C\ldots\ldots(2)$ حيث $d\sigma$ هي السرعة السطحية

أما إذا أخذنا الإحداثيات القطبية فأن قانون السطوح يأخذ الشكل :

$$r^2.d\varphi=C$$

دستورا بينيه

$$\vec{v}=r'\vec{I}+r\varphi'\vec{J}\Rightarrow\vec{\Gamma}=(r''+r\varphi'^2)\vec{I}+(r\varphi''+2r''\varphi')\vec{J}$$

حيث المشتقات الواردة فيها تكون بالنسبة للزمن إلا أنه يمكن التخلص من الزمن ثم التحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية φ وذلك إذا كانت الحركة خاضعة لقانون السطوح في هذه الحالة تكون لدينا

$$(1)\ldots\begin{cases}\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{I}+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{J}\\ r^2\frac{d\varphi}{dt}=C\end{cases}$$

لندخل متحول جديد معرف بالمساواة التالية :

$$u=\frac{1}{r}\ldots\ldots(2)$$

عندها من المساواة التالية في (1) التي تعبر عن شرط خضوع النقطة لقانون السطوح

$$\varphi'=cu^2\ldots\ldots(3)$$

كذلك شرط أن : $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}.\frac{du}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{u^2}cu^2\frac{du}{d\varphi}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-c\frac{du}{d\varphi}$

وبالتالي المساواة الأولى من (1) تصبح :

$$\vec{v} = -c\frac{du}{d\varphi}\vec{I} + \frac{1}{u}c.u^2\vec{J} \Rightarrow \vec{v} = c\left[-\frac{du}{d\varphi}\vec{I} + u\vec{J}\right]$$

$$\Rightarrow v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] \Rightarrow \boxed{v^2 = c^2[u'^2 + u^2]}$$ بينيه الأول

$$\boxed{\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)}$$ بينيه الثاني

ملاحظة : إن دساتير بينيه تستخدم للقوة المركزية فقط ((الكواكب – الذرات حول النواة))

تمرين

لتكن M نقطة مادية تتحرك حركة مركزية وفق العلاقة: $r = a.e^{-\lambda\theta}$.

أوجد قانون القوة المركزية التي تؤثر على هذه النقطة المادية، حيث a, λ ثوابت.

الحل

من قانون التحريك الأساسي : $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

وحسب دستور بينيه الثاني : $\Gamma = -c^2u^2(u'' + u)$

نعلم أن $u = \frac{1}{r}$ ⇐ $u = \frac{1}{a}.e^{\lambda\theta}$

$$u' = \frac{\lambda}{a}e^{\lambda\theta} \Longrightarrow u'' = \frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta}$$

نعوض دستور بينييه في قانون التحريك الأساسي فنجد : $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

$$F = -mc^2\left(\frac{1}{a}.e^{\lambda\theta}\right)^2.\left(\frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta} + \frac{1}{a}.e^{\lambda\theta}\right) \Longrightarrow F = -mc^2\frac{e^{2\lambda\theta}}{a^2}\left(\frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta} + \frac{e^{\lambda\theta}}{a}\right)$$

$$F = -mc^2\frac{e^{2\lambda\theta}}{a^2}\left(\frac{e^{\lambda\theta}(\lambda^2+1)}{a}\right) \Longrightarrow \boxed{F = \frac{-mc^2}{a^3}e^{3\lambda\theta}(\lambda^2 + 1)}$$

وهي عبارة القوة المؤثرة على النقطة المادية.

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** راما جوهر ** عبير خزنة كاتبي