◄ دكتور المادة: أحمد هايل

◄ المحاضرة: الثامنة عشر والأخيرة

عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : تمارين .

تمرين : ليكن (X,d) فضاء متري و $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ جماعة من المتراصات حيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; k_n \neq \emptyset \; ; \; \lim \delta(k_n) = 0 \; , \; k_{n+1} \subseteq k_n$$

أثبت أن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} k_n \neq \emptyset$ تحوي عنصر واحد فقط .

الـحـل

أولاً نثبت أن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} k_n \neq \emptyset$.

لنفرض جدلا أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} k_n = \emptyset$

$$\Rightarrow k_1 \cap \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} k_n\right) = \emptyset \Rightarrow k_1 \subseteq \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} k_n\right)^c = \bigcup_{n=2}^{\infty} {k_n}^c$$

$$\Rightarrow k_1 \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} {k_n}^c$$

إن $\left\{ k_n : \begin{matrix} n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 2 \end{matrix} \right\}$ مجموعات كل منها متراصة ومنه k_n مغلقة $\Leftarrow$ ${k_n}^c$ مفتوحة .

$\Leftarrow$ $k_1 \subseteq \bigcup_2^{\infty} {k_n}^c$ متراصة . إذا $\left\{ {k_n}^c : \begin{matrix} n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 2 \end{matrix} \right\}$ تغطية مفتوحة لـ k_1 .

وبما أن k_1 متراصة إذا يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية . بحيث $k_1 \subseteq {k_{n_1}}^c \cup \dots \cup {k_{n_r}}^c$

وبفرض $m = max\{x_i\}\ ;\ 1 \le i \le n$

$$m \ge n_i \Rightarrow k_m \subseteq k_{n_i} \Rightarrow {k_{n_i}}^c \subseteq {k_m}^c$$

$$\Rightarrow k_1 \subseteq {k_{n_i}}^c \cup \ldots \cup {k_{n_r}}^c \subseteq {k_m}^c \cup \ldots {k_m}^c$$

$$\Rightarrow k_1 \subseteq {k_m}^c \Rightarrow k_m \cap k_1 \subseteq {k_m}^c \cap k_m = \emptyset$$

$$\Rightarrow k_m \subseteq \emptyset \Rightarrow k_m = \emptyset$$

وهذا غير صحيح فرضا لأن $k_n \neq \emptyset$ مهما يكن n إذا $\bigcap_{n=1}^{\infty} k_n \neq \emptyset$

إن : $\emptyset \neq \bigcap_1^{\infty} k_n \subseteq k_n$

$$\Rightarrow \delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} k_n\right) \le \delta(k_n) \ldots .(*)$$

ولدينا فرضا $lim_{n\to\infty}\, \delta(k_n) = 0$

بجعل $n \to \infty$ في $(*)$ **نجد :**

$$0 \le \delta\left(\bigcap_1^{\infty} k_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \delta(k_n) = 0$$

$$\Rightarrow \delta\left(\bigcap_1^{\infty} k_n\right) = 0$$

وبالتالي إنها تحوي عنصر واحد لأنه إذا كان:

$$x, y \in \bigcap_1^{\infty} k_n \Rightarrow 0 \le d(x,y) \le \delta\left(\bigcap_1^{\infty} k_n\right) = 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

اذاً المجموعة $\bigcap_1^{\infty} k_n$ تحوي عنصر واحد

تمرين : ليكن (X,d) فضاء متري و X متراص فإن X تام .

الحــل

لنبرهن أن X تام نأخذ متتالية $\{x_n\}$ كوشية في (X,d) . نشكل المجموعات التالية :

$$k_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\dots\} \quad ; \quad k_n = \overline{A}_n$$

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\dots\}$$

المجموعة k_n مغلقة لأنها لصاقة مجموعة في X .

إذا k_n مغلقة في فضاء متراص إذا هي متراصة ، إذا المجموعات k_n متراصة مهما يكن $n \in \mathbb{N}^*$

كما ان $\quad k_n \neq \emptyset \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A_{n+1} \subseteq A_n \Longrightarrow \overline{A}_{n+1} \subseteq \overline{A}_n \Longrightarrow k_{n+1} \subseteq k_n$$

بما أن المتتالية كوشية إذا :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* ; s,t \geq n_0 \Longrightarrow d(x_s, x_t) < \varepsilon/2$$

$$n_0 \geq n \quad ; \quad t, s \geq n \Longrightarrow \forall x,y \in A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots.\}$$

$$\Longrightarrow d(x,y) < \varepsilon/2 \quad , \quad \forall x,\varepsilon \in A_n ; d(x,y) < \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \delta(A_n) \leq \varepsilon/2$$

ولدينا $\quad \delta(A) = \delta(\overline{A})$

$$\Longrightarrow \delta(A_n) = \delta(\overline{A}_n) = \delta(k_n) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

إذا من أجل $\varepsilon > 0$ وجدنا $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث : $\quad n \geq n_0 \Longrightarrow \delta(k_n) < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow |\delta(k_n) - 0| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \delta(k_n) = 0$$

باستخدام التمرين السابق(٦) ، نجد أن المجموعة $\bigcap_1^\infty k_n$ تحوي عنصر واحد فقط نرمز له بـ x

إذا : $\bigcap_1^\infty k_n = \{x\}$ سنبرهن أن $x_n \longrightarrow x$

$$\lim_{n\to\infty} \delta(x_n) = 0 \qquad : \forall\varepsilon > 0\,; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \delta(k_n) < \varepsilon$$

لكن $x_n \in A_n \subseteq \overline{A}_n = k_n$ و $x \in k_n$

$$\Longrightarrow x\,, x_n \in k_n \Longrightarrow d(x_n\,, x) \leq \delta\,(k_n) < \varepsilon \Longrightarrow d(x_n\,, x) < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\,;\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \quad ; n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n\,, x) < \varepsilon$$

x_n متقاربة من x $\Longrightarrow x_n \longrightarrow x \Longrightarrow$

ومنه X تام .

انتهت المحاضرة

وبهذا نكون قد انهينا مقرر التبولوجيا١ .. وفقنا وإياكم الله

إليكم الأخطاء التي نعتذر عن ورودها في المحاضرات السابقة ☹

المحاضرة الأولى - الصفحة الثانية : الملاحظة ((نرمز للمجموعات بأحرف كبيرة $X\,, Y\,, Z$ وفي حال ذكرها أنها خالية نكتب $Y = \emptyset$ وليس $Y = 0$))

التصحيح ⟸ ملاحظة : ((إذا كان $Y \neq \emptyset$ نلاحظ أن التابع d_Y هو مقصور d على $Y \times Y$

فنحصل على فضاء متري جديد هو $(\,Y\,, d_Y\,)$ ندعوه الفضاء المتري الجزئي في X))

الشرط الثاني في إثبات أن d دالة مسافة نستخدم علاقة التكافؤ (⟺)في المثال الثالث والرابع والخامس .

- الصفحة السابعة : المثال السادس .. نبدل كل $\partial(x, y)$ بـ $\delta(x, y)$ (رمز تابع المسافة) .. وفي الشرط الرابع :

التصحيح ⟸ هنا نميز الحالتين :

١) إذا كان $x = z$ فإن $\delta(x, y) = 0$ ومنه المتراجحة صحيحة .

٢) إذا كان $x \neq z$ عندئذ إما $x \neq y$ أو $y \neq z$ لأن x و z مختلفان .

إذا إما $\delta(x, y) = 1$ أو $\delta(x, z) = 1$ ، ومنه المتراجحة صحيحة لأنها من الشكل

$$1 \leq 1 + 0 \;;\;\; 1 \leq 0 + 1$$

المحاضرة الثانية : - **الصفحة الأولى :** المثال الأول .. الخطأ $x = B[a,b]$

التصحيح $X = B[a,b]$ ، حيث ذكرنا أن المجموعات تكب بأحرف كبيرة

- **الصفحة الرابعة :** السطر الثاني .. $lim_{n\to\infty} x_n = x$

المثال الأول : لتكن $X = \mathbb{R}$ ، وفي المثال الثاني : $X = \mathbb{R}^2$

نبرهن أن $\begin{cases} x_{n_{n\to\infty}} \longrightarrow x \\ y_{n\ n\to\infty} \longrightarrow y \end{cases} \Leftrightarrow (x_n\ , y_n\ )_{n\to\infty} \longrightarrow (x,y)$

- **الصفحة السادسة :** تعريف المجموعة المفتوحة : نقول أن المجموعة $\boldsymbol{X} \supseteq$ U أنها مفتوحة في الفضاء المتري $\boldsymbol{X}$ إذا وجد لكل عنصر U∋ $\boldsymbol{a}$ عدد ...

المثال : السؤال هو : هل المجال] 5 , 1− [مجموعة مفتوحة ؟؟

المحاضرة الثالثة : - الصفحة الثانية : حل المثال الثالث .. ذكرنا أن $\mathbb{R} \ni \boldsymbol{r}$ لكن هذا ليس بالضرورة ونحن لا نعرف $\boldsymbol{r}$ ؟؟

- الصفحة الرابعة : كتبنا إذا كان $(*)$ .... $\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

صحيحة فإن $(*)$ صحيحة .. والتصحيح : إذا كانت $(*)$ صحيحة فإن المتراجحة المطلوبة الصحيحة

$(*)$ صحيحة نتأكد من ذلك نضرب الطرفين بالوسطين .

المحاضرة الرابعة : - الصفحة الأولى : التمرين الأول ..

الشرط الأول : $\boldsymbol{D = min\{1, d(x,y)\} \geq 0}$

الشرط الثاني هو علاقة التكافؤ ($\Leftrightarrow$) .. والتمرين الثاني الشرط الثاني هو علاقة تكافؤ دائما ($\Leftrightarrow$)

المحاضرة الخامسة : - الصفحة الثالثة : مبرهنة أن الكرة مغلقة في اي فضاء مري مجموعة مغلقة

السطر الثاني التصحيح .. وذلك ببرهان أن $\boldsymbol{X}\ \backslash \boldsymbol{B(a,\varepsilon)}$ مجموعة مفتوحة أي توجد كرة مفتوحة محتواه فيها ليكن $\boldsymbol{x \in X \backslash B(a,\varepsilon)}$ فإن $\boldsymbol{d(x,a) > \varepsilon => 0 < r = d(x,a) - \varepsilon}$

وفي المثال عن المتتالية كوشية غير متقاربة آخر سطر بالصفحة الرابعة ..

كتبنا أنها مستحيلة دون ذكر السبب .. والسبب هو :

$$\frac{1}{p} = |0 - \frac{1}{p}\ | = \lim_{n\to\infty} |\ \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\ |$$

المحاضرة السابعة : - الصفحة الأولى . حل تمرين رقم (١) كتبنا $\exists\varepsilon > 0 ; N(x,\varepsilon) \subseteq A \subseteq B$

التصحيح : $N(x,\varepsilon) \subseteq B \Longrightarrow x \in B^{\circ} \qquad \Longleftarrow \qquad A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

- الصفحة الثالثة : في برهان رقم (3) كتبنا : لنبرهن أن C مفتوحة . سنبرهن أولا أن متممها مغلقة

$E = C^0$ والتصحيح : $E = C^c$

وفي السطر الأخير كتبنا $\quad d(x,a) = d(x,b)$

التصحيح : $\quad d(x,a) \geq d(x,b)$

- الصفحة الرابعة : المثال التوضيحي ... يجب ذكر أن $D = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ مجموعة مغلقة في السطر الرابع .

- الصفحة الخامسة : تعريف النقطة الحدية : نكتب فقط : ليكن (X,d) فضاء متري ، نقول عن $x \in X$

أنها نقطة حدية في $A \subseteq X$ إذا تحقق : $\quad \forall\varepsilon > 0 ; N(x ,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq 0$

ونرمز بـ A مجموعة النقاط الحدية في A وتدعى المجموعة المشتقة من A

المحاضرة التاسعة : - الصفحة الثالثة : في نص المبرهنة يجب ذكر أن A مجموعة النقاط الحدية لـ A

- الصفحة الرابعة : ثالث سطر من البرهان : لتكن $x \in k$ ولنفرض جدلا أن $x \notin A$ إذا :

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 : N\ (x\ ,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset$$

السطر الخامس و السادس من البرهان .. الخطأ $N(x ,\varepsilon)$ ، والصحيح $N(x ,\varepsilon_0)$

السطر السابع كتبنا أن $x \notin F$ دون ذكر السبب والسبب هو أن $x\ \in (x ,\varepsilon_0)$

وفي السطر الثالث من الأخير كتبنا $\overline{A}$ أصغر مجموعة تحوي A والصحيح أن $\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

المحاضرة العاشرة : - الصفحة الأولى السطر الثاني .. لدينا من الطلب الأول : $\overline{A} \subseteq A$

والصحيح $A \subseteq \overline{A}$

ذكرنا سابقا أن التمرين الثالث هو للاطلاع وليس الثاني .

المحاضرة الحادية عشر : آخر سطر في الصفحة الرابعة يجب كتابة أن :

$$\Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$$

المحاضرة الثانية عشر : ـ الصفحة الثانية : تعريف المجموعة المتراصة .. إذا امكن استخراج تغطية جزئية منتهية من كل تغطية مفتوحة لـ k .. ((لم نكتب كلمة منتهية))

المحاضرة الرابعة عشر : ـ الصفحة الأولى .. آخر خمس أسطر يفضل كتابتها بالشكل :

$$A \subseteq f^{-1}(\theta_i) \cup \ldots \cup f^{-1}(\theta_{i_n})$$

$$\Rightarrow f(A) \subseteq f\,[f^{-1}(\theta_i) \cup \ldots \cup f^{-1}(\theta_{i_n})]$$

$$= f(f^{-1}(\theta_i)) \cup \ldots \cup (f\left(f^{-1}(\theta_{i_n})\right))$$

$$\subseteq \theta_{i_1} \cup \theta_{i_2} \cup \ldots \cup \theta_{i_n}$$

ـ الصفحة الخامسة : السطر الخامس ..

الخطأ $\overline{\overset{\circ}{Q}} = R \subsetneq \overline{Q^\circ} = \emptyset$ ، والصحيح هو $\overline{Q^\circ} = \emptyset \subsetneq \overline{\overset{\circ}{Q}} = R$

لأن $\emptyset \not\subseteq R$ إنما $\emptyset \subsetneq R$

وفي آخر سطرين كتبنا تصحيح خطأ المحاضرة الحادية عشر .. كتبنا $f(N(x < \delta))$ والصحيح هو $f(N(x, \delta))$.

إعداد: ناريمان جلو * آية اليافي * هالة مصطفى

تنسيق: ولاء الأخضر♥