9

حل اسئلة الدورات
2018-2015

" دورة الفصل الثاني 2015 "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك .

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف ابداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط .

أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .

السؤال الرابع : M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المسار $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = mk(y\vec{i} + xy\vec{j})$ هل القوة كمونية وإذا كانت كمونية أوجد تكامل الطاقة للنقطة M مع العلم ان a, k ثوابت .

انتهت الأسئلة ☺

" الحل ^_^ "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

الحل

1) انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية النسبية $m\overrightarrow{\Gamma_r} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{J_e} + \overrightarrow{J_c}$

إن معادلة التحريك في الحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك في الحالة العامة $m\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$ إلا بإضافة الحدين $(\overrightarrow{J_e}, \overrightarrow{J_c})$

فإذا أخذنا كمية الحركة $;(v = v_a) \qquad d(mv) = F.dt$

أما كمية الحركة النسبية $;(v = v_r) \qquad d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c.dt$

كذلك في الطاقة الحركية $;(v = v_a) \qquad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr$

وفي حالة الطاقة الحركية النسبية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c.dr$

لدينا : $J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$

لأن $\left(\frac{dr}{dt}, dr\right)$ شعاعان متوازيان

وأصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overrightarrow{F}.dr + \overrightarrow{J_e}.dr}$

و هي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك .

عندما تتحرك نقطة مادية M على منحني ثابت فإن رد الفعل لن يكون ناظمياً بشكل عام أي أن رد الفعل يصنع زاوية مع المستوي الناظمي تدعى " زاوية الاحتكاك " وبذلك يكون لرد الفعل مركبتان مركبة مماسية $\overrightarrow{R_\tau}$ وأخرى ناظمية $\overrightarrow{R_N}$ موجودة في المستوي الناظمي للمنحني في تلك النقطة ويمكن تفريق المركبة $\overrightarrow{R_N}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{R_n}$ محمولة على الناظم الاساسي والثانية $\overrightarrow{R_b}$ محمولة على ثنائي الناظم

وبالتالي فإن قانون الحركة يعطى بالعلاقة $m\,\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{F}$

وبإسقاط العلاقة السابقة نجد :

بالإسقاط على $\vec{\tau}$ نجد

$$m\,\frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau \ \ldots\ldots (1)$$

بالإسقاط على $\vec{n}$ نجد

بالإسقاط على $\vec{b}$ نجد

$$(2)\quad \begin{cases} m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n + R_n \ \ldots (*) \\ 0 = F_b + R_b \ \ldots (**) \end{cases}$$

إن المعادلة (1) تعطينا معادلات الحركة ، والعلاقة (2) تعطينا ردود الافعال .

نعلم ان $\vec{R_\tau}$ يعاكس اتجاه الحركة وقيمته المطلقة اثناء الحركة تساوي $|R_\tau| = f|R_N|$
حيث f يدعى معامل الاحتكاك وبالتالي نستطيع أن نكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$m\,\frac{dv}{dt} = F_\tau - f|R_N| \ \ldots . (\$)$$

طويلة المركبة الناظمية $\quad |R_N| = \sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

من المعادلة $(*)$ نجد... $\quad R_n^2 = \left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 \Leftarrow R_n = \frac{mv^2}{\rho} - F_n$

من المعادلة $(**)$ نجد... $\quad R_b^2 = F_b^2 \Leftarrow R_b = -F_b$

بتعويض بطويلة المركبة الناظمية... $\quad |R_N| = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}$

ومنه بتعويضها بالعلاقة $(\$)$ نجد ...

$$\boxed{m\,\frac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2}}$$

وفي حالة خاصة عندما يكون المنحني مستقيماً فإن $F_b // F_n$ وكذلك $\rho = 0$ عندئذٍ :

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$

وفي حالة كون المنحني مستوياً ومحصلة القوة المؤثرة على النقطة المادية واقعة في هذا المستوي فإن معادلات الحركة تبسط إلى الشكل :

$$m\,\frac{dv}{dt} = F_\tau - f\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F_n\right)^2 + F_b^2} \Longrightarrow m\frac{dv}{dt} = F_\tau - f.R_n$$

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف ابداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

الحل

(1 انطلاقاً من قانون التحريك الاساسي : $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد ..... $-\alpha x' - \beta x'^2 = mx''$

$$mx'' + \alpha x' + \beta x'^2 = 0 \implies x'' + \frac{\alpha}{m}x' + \frac{\beta}{m}x'^2 = 0$$

بفرض أن $\left(\left(\frac{\alpha}{m} = k \quad , \quad \frac{\beta}{m} = P\right)\right)$ نجد ... $x'' + kx' + Px'^2 = 0$

بالتقسيم على x' نجد : $\frac{x''}{x'} + k + Px' = 0 \implies \frac{x''}{x'} + Px' = -k$

بمكاملة الطرفين نجد : .... $\ln|x'| + px = -kt + \ln|c| \implies e^{\ln|x'|+Px} = e^{-kt+\ln|c|}$

بتقسيم على e^{Px} نجد ... $\boxed{x' = c.\,e^{-kt-Px}}$

لإيجاد الثابت $((c))$ من شروط البدء $((x' = v_0 \;, x = x_0 \,,\; t = 0\,))$ نجد :

$$v_0 = c.\,e^{-px_0} \implies c = v_0.\,e^{px_0}$$

نلاحظ أن $x' = v_0.\,e^{px_0}.\,e^{-kt-Px} \implies x' = v_0.\,e^{-kt-P(x-x_0)} > 0$ اي أنه **لن يتوقف** .

(2 لحساب الزمن من العلاقة ...

$$x' = v_0.\,e^{-kt-P(x-x_0)} \implies v = v_0.\,e^{-kt-P(x-x_0)}$$

$$\frac{v_0}{3} = v_0.\,e^{-kt-P(x-x_0)} \implies \frac{1}{3} = e^{-kt-P(x-x_0)} \implies \ln\left|\frac{1}{3}\right| = -kt - P(x-x_0)$$

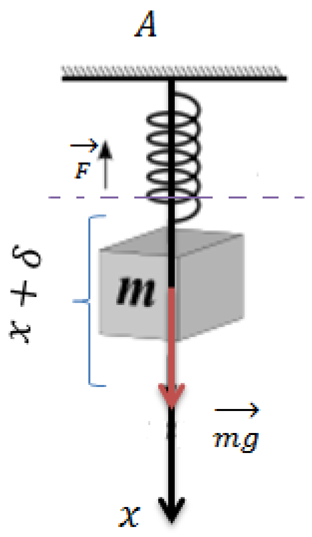
$$-\ln|3| = -kt - P(x-x_0) \implies kt = \ln|3| - P(x-x_0)$$

و هي الفترة الزمنية لتصل سرعة القارب إلى $\frac{v_0}{3}$

$$t = \frac{\ln|3| - P(x - x_0)}{k}$$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط **.أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .**

الحل



لنأخذ المحور ox شاقولياً متجهاً نحو الاسفل أما مبدأ القياس عليه فتؤخذ نقطة تعليق الجسم بالنابض في حال توازن الجسم عندما يكون الجسم معلقاً .

إن القوى المؤثرة على الجسم هي :

$P = mg$ قوة الثقل ، وقوة F تتناسب مع مقدار استطالة النابض $\Delta l = (x + \delta)$; $F = -c|\Delta l|$

حيث F هي القوة المرجعة للنابض و δ مقدار تغير حركة x من موضع سكون نابض و Δl الاستطالة النابض و c ثابت صلابة النابض .

ومنه حسب قانون التحريك الاساسي نجد : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{\Gamma} \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{\Gamma}$

وبالإسقاط نجد : $mx'' = m.g - c(\delta + x) \Longrightarrow mx'' = P + F$

$$mx'' = m.g - c\delta - cx$$

ولكن في هذه الحالة يكون لدينا دوماً $m.g = c\delta$ ((وقد تم الشرح بالتفصيل في المحاضرة السادسة))

$$-cx = mx'' \Longrightarrow mx'' + cx = 0 \Longrightarrow x'' + \frac{c}{m}x = 0$$

بتعويض(($\frac{c}{m} = k^2$)) نجد:

$$x'' + k^2x = 0 \Longrightarrow \boxed{x'' = -k^2x \ldots\ldots (*)}$$

و هي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة وبدون طرف ثاني تقبل حل من الشكل ..

$$x = c_1e^{\Lambda_1 t} + c_2e^{\Lambda_2 t}$$

لإيجاد الحل العام نفرض الحلول الخاصة من الشكل: $x = e^{\lambda t}$

نوجد x'' ونعوضها في $(*)$.... $x' = \lambda e^{\lambda t} \Longrightarrow x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

فنجد : $e^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0 \qquad \lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0$

ومنه المعادلة المميزة هي ... $\lambda^2 + k^2 = 0$

وجذرها $\lambda_1 = -ik \;,\; \lambda_2 = ik$ حيث λ_1, λ_2 جذور المعادلة المميزة

نعوض λ_1, λ_2 بالمعادلة التفاضلية.. $x = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$

نعلم أن: $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt \quad \&\& \quad e^{-ikt} = \cos kt - i \sin kt$

$$x = (c_1 \cos kt + c_1\, i \sin kt) + (c_2 \cos kt - c_2\, i \sin kt)$$

$$x = (c_1 + c_2)\cos kt + (c_1 - c_2) i \sin kt$$

بفرض $(c_1 + c_2) = A \quad \&\& \quad (c_1 - c_2)i = B$

فتصبح.. $\boxed{x = A\cos kt + B\sin kt}\;.....(1)$

إذا أخذنا شروط البدء باللحظة $((x = x_0 \;, x' = v_0 \;, t = 0))$

نشتق العلاقة (1) ... $x' = -Ak\sin kt + Bk\cos kt$

$$x_0 = A \;, v_0 = Bk \Longrightarrow B = \frac{v_0}{k}$$

$$\boxed{x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt}$$

وهي معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية

وبتعويض شروط البدء من المسألة $((x_0 = -\delta \;, x' = 0 \;, t = 0))$ نجد:

$$\boxed{x = -\delta\cos kt}$$

وهو قانون حركة الجسم

السؤال الرابع : M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المسار $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ وتخضع لقوة من الشكل $\vec{F} = mk(y\vec{\imath} + xy\vec{\jmath})$ هل القوة كمونية وإذا كانت كمونية أوجد تكامل الطاقة للنقطة M مع العلم ان a, k ثوابت .

الحل

القوة المؤثرة : هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة الجاذبة $\vec{F} = mk(y\vec{\imath} + xy\vec{\jmath})$
قوة الثقالة كمونية لأن من المعلوم أن في منطقة معينة بالقرب من سطح الأرض (صغيرة بالنسبة للكرة الأرضية)
يمكن اعتبار قوة الثقالة هي $p = mg$ ثابتة بالشدة والاتجاه
وبالتالي إذا أخذنا جملة المحاور الاحداثية فيها oz شاقولي صاعد
وبالتالي فإن مساقط قوة الثقالة

$$F_x = 0 \ , \ F_y = 0 \ , F_z = -mg$$

من أجل الاثبات أن القوة كمونية يجب تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

الشروط محققة .

ومنه :

$$u = \int F . dr \Rightarrow u = -\int mg . dz$$

$$\boxed{u = -mgz}$$

و هو تابع الكمون(القوة الثقالية)

أما بالنسبة للقوة $\vec{F}$ بالإسقاط نجد :

$$F_x = -mky \ , \ F_y = -mkxy \ , \ F_z = 0$$

لكي تكون القوة كمونية يجب ان تحقق الشروط التالية :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

لكن نلاحظ هنا أن القوة غير كمونية لأن :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = mk \ , \ \frac{\partial F_y}{\partial x} = myk \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

وبالتالي نتوقف عن الحل.

" انتهى حل الدورة "

" دورة التكميلي 2015 "

السؤال الأول : برهن أنه إذا كان الارتباط مثالياً ولا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن نظرية الطاقة الحركية تبقى محتفظة على شكلها التي تأخذه من أجل النقطة الطليقة .

السؤال الثاني : AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الافقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ،
M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب . والمطلوب :
اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .

السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلات:

$$y = b\, sin(\omega t) \qquad , \qquad x = a\, cos(\omega t)$$

حيث: $(a\,,b\,,\omega)$ ثوابت.

والمطلوب: **أوجد مسار النقطة والقوى المؤثرة على النقطة المادية M**

السؤال الرابع : M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v ،المستقيم oA يدور حول o في المستوي x, y بسرعة زاوية مقدارها ω .
أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

انتهت الأسئلة ☺

" ^_^ الحل "

السؤال الأول : برهن أنه إذا كان الارتباط مثالياً ولا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن نظرية الطاقة الحركية تبقى محتفظة على شكلها التي تأخذه من أجل النقطة الطليقة .

الحل

يمكن معالجة النقطة المقيدة كنقطة طليقة فيما إذا اعتبرنا أن هنالكَ قوى أُخرى غير القوى الخارجية المطبقة على هذه النقطة كقوى ردود الأفعال وبناءً على ذلك يمكن ان نطبق جميع نظريات التحريك التي طبقت على حركة نقطة طليقة .

وبالتالي حسب نظرية الطاقة الحركية يكون لدينا :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + \lambda_1\ grad\ f_1.dr + \lambda_2\ grad\ f_2.dr$$

وبما أن

$$grad\ f_1\ dr = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz$$

$$grad\ f_2\ dr = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz$$

فإن معادلتي الارتباط $f_1(x,y,z,t) = 0$ $f_2(x,y,z,t) = 0$ تحقق هذه العلاقتين :

$$\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz}+ \frac{\partial f_1}{\partial t}dt = 0 \quad , \quad \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz} + \frac{\partial f_2}{\partial t}dt = 0$$

ومنه نجد أن :

$$grad\ f_1 dr = -\frac{\partial f_1}{\partial t}dt \quad , \quad grad\ f_2 dr = -\frac{\partial f_2}{\partial t}dt$$

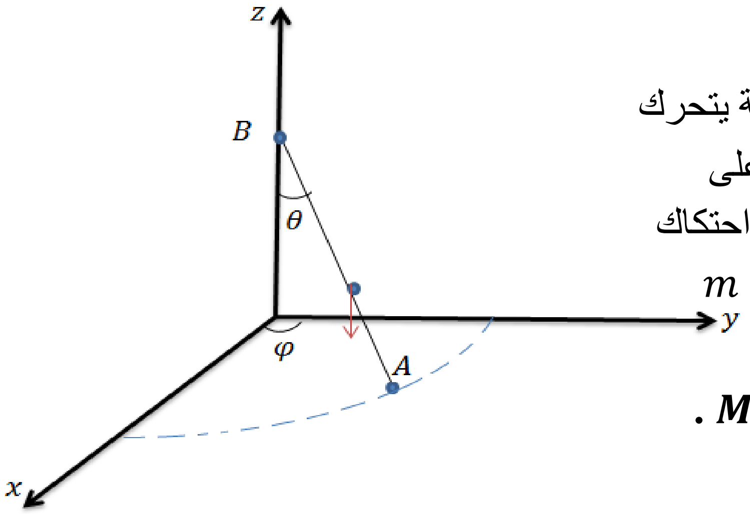
نعوض في نظرية الطاقة الحركية فنحصل على:

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t}dt - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t}dt}$$

وهي معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة مقيدة على منحني.

أمّا إذا كان الارتباط لا يتعلق بالزمن بشكل مباشر فإن: $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$

فتصبِح العلاقة على الشكل التالي: $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr}$ وهيَ معادلة نظرية الطاقة الحركية لنقطة طليقة.



السؤال الثاني : AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الأفقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ، M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب .

والمطلوب : اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .

الحل

نأخذ جملة الإحداثيات الكروية

$$x = l\cos\varphi\sin\theta \ , y = l\sin\varphi\sin\theta \ , z = l\cos\theta \ .... (\$)$$

نشتق المعادلات ($) فنجد :

$$x' = l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$y' = l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$z' = -l\sin\theta\,.\,\theta'$$

ونعلم أن معادلة الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}mv^2$

$$\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Longrightarrow \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$
$$oM = l\cos\varphi\sin\theta + l\sin\varphi\sin\theta + l\cos\theta$$
$$\Longrightarrow v = (oM)' = l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$+ l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi' - l\sin\theta\,.\,\theta'$$

$$\Longrightarrow v^2 = (l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2$$
$$+ (l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2 + (-l\sin\theta\,.\,\theta')^2$$

بفك التربيع نجد :

$$\Rightarrow v^2 = l^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 - 2l^2.\cos\varphi\sin\theta\,.\,\theta'.\sin\varphi\cos\theta\,.\,\varphi'$$
$$+l^2\ \sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + l^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2$$
$$+2l^2.\sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta'.\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi' + l^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

بالإصلاح والمطابقة نجد :

$$\Rightarrow v^2 = l^2\left[\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2\right]$$
$$+l^2[\sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + \cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

$$v^2 = l^2.\theta'^2[\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)]$$
$$+l^2.\varphi'^2[sin^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

$$\Rightarrow v^2 = l^2.\theta'^2(\cos^2\theta + sin^2\theta) + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta$$

$$\boxed{v^2 = l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta}$$

وجدنا سابقاً أن $p = mg$ هي قوة كمونية ويكون

$$u = \int p\,.dr \qquad u = \int mg\,.dz \qquad u = mgz$$

$$u = l.mg.\cos\theta$$

نعوض في قانون تكامل الطاقة الحركية $\quad T = u + h$

$$\frac{1}{2}m\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta\right) = l.mg.\cos\theta + h$$

بالتقسيم على m نجد :

$$\frac{1}{2}\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta\right) = l.g.\cos\theta + h_1 \qquad ; h_1 = \frac{h}{m}$$

السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك وفق المعادلات:

$$x = a\cos(\omega t) \qquad , \qquad y = b\,sin(\omega t)$$

حيث: $(a\,,b\,,\omega)$ ثوابت.

والمطلوب: أوجد مسار النقطة والقوى المؤثرة على النقطة المادية M

الحل

لإيجاد مسار النقطة المادية نتخلص من الزمن:

نربع المعادلة x ونقسم الطرفين على a^2 $\qquad x^2 = a^2\cos^2(\omega t)$

نربع المعادلة y ونقسم الطرفين على b^2 $\qquad y^2 = b^2\sin^2(\omega t)$

فنجد :

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2(\omega t) \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\omega t)$$

بجمع المعادلتين التاليتين :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وبالتالي النقطة المادية تتحرك على القطع الناقص.

لإيجاد القوة المؤثرة على النقطة المادية:

حسب قانون التحريك الاساسي : $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

ومنه

$$\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$$F_x = m\,x'' \qquad , \qquad F_y = m\,y''$$

$$x' = -a\omega\sin\omega t \qquad x'' = -a\omega^2\cos\omega t \qquad x'' = -x\,\omega^2$$

$$y' = b\omega\cos\omega t \qquad y'' = -b\omega^2\sin\,\omega t \qquad y'' = -y\,\omega^2$$

$$z' = z'' = 0$$

$$,\quad F_y = -my\,\omega^2 \;\ldots.(2) \qquad , \quad F_x = -mx\,\omega^2 \;\ldots.(1)$$

نعوض كل من (1) و (2) ب (*) ونجمع

$$\vec{F} = -m\omega^2 x\,\vec{\imath} - m\omega^2 y\,\vec{\jmath} \qquad \vec{F} = -m\omega^2(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\,)$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$$

إن $\overrightarrow{F}$ القوة المؤثرة على النقطة سالبة لأنها جاذبة و $\vec{r}$ نصف القطر الشعاعي .

السؤال الرابع : M نقطة مادية تتحرك على المستقيم oA بالسرعة v ، المستقيم oA يدور حول o في المستوي x, y بسرعة زاوية مقدارها ω .

أوجد سرعة النقطة المادية M بالنسبة للمستوي بدلالة $\overrightarrow{oM} = \vec{r}$

الحل

لنأخذ في المستوي oxy المحورين x, y مبدأهما o ان حركة النقطة M على المستقيم (oA) حركة نسبية وسرعتها سرعة نسبية (v_r) على هذا المستقيم هي السرعة النسبية لهذه النقطة .

الحركة الدورانية للمستقيم (oA) هي حركة جرية للنقطة M وسرعة تلك النقطة من المستقيم (oA) التي تنطبق على M في اللحظة t تكون عبارة عن السرعة الجرية للنقطة M .

إن وضع النقطة M على المستقيم (oA) يتحدد بالمقدار $oM = r$ وهي تتحرك على دائرة نصف قطرها (r) ((بالحركة الجرية)) مقدار سرعتها الجرية $v_e = \omega \times r$ { لأنها عامودية على المحور $(\overrightarrow{oM})$ }

لدينا السرعة المطلقة $v_a = v_r + v_e$ وبالتالي نأخذ الطويلة :

$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e . v_r . cos\varphi}$ وبملاحظة تعامد السرعتين النسبية والجرّية $((cos\varphi = 0))$

نجد السرعة المطلقة هي $v_a = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_r^2}$

" انتهى حل الدورة "

" دورة الفصل الأول 2016 "

السؤال الأول : برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمركز ما يساوي مجموع عزوم القوى المؤثرة على هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز .

السؤال الثاني : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\,\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

السؤال الثالث : يدور إلكترون حول نواة ذرة بمسار دائري وبسرعة ثابتة v، أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسة لمساره.

والمطلوب: تعيين السرعة الواجب تطبيقها على الإلكترون لكي يفلت من جذب النواة.

السؤال الرابع : في مستوي شاقولي OXY توجد نقطة ، معرفة بترتيبها $AOX = \alpha$ و M نقطة مادية كتلتها m. في لحظة واحدة قذفت النقطة M من o وفق OA وسرعة ابتدائية v_0 ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A .

برهن أن المتحركين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل P وأن المستقيم MM' يبقى موازيا لاستقامة مفروضة ثم احسب طول هذا المستقيم

انتهت الأسئلة ☺

" الحل ^_^ "

السؤال الأول : برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة لمركز ما يساوي مجموع عزوم القوى المؤثرة على هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز .

إذا كانت M نقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{v}$ ، وبفرض لدينا نقطة O ثابتة في الفراغ فإن عزم كمية الحركة هو العزم الحركي للنقطة M حول O وهو : $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\rho}$
حيث $\vec{\rho}$ هو شعاع كمية الحركة وبالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{oM} \wedge \vec{\rho}\right) \qquad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{\rho}\right) + \left(\overrightarrow{oM} \wedge \frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{oM}}{dt} \wedge m\vec{v}\right) + \left(\overrightarrow{oM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{oM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{oM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

السؤال الثاني : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\,\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

الحل

حسب قانون التحريك الأساسي $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F} + \overrightarrow{mg} + \vec{R} \qquad m\,\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$

بالإسقاط على المحور (ox).. $x'' = -\frac{k^2}{x^3} \qquad ; R = mg \quad m\,x'' = -m\,\frac{k^2}{x^3} - mg + R$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ولنحل هذه المعادلة نضرب الطرفين بـ $2x'$:

$$2\,x'\,x'' = -\frac{2x'\,k^2}{x^3}$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة للزمن نجد :

$$\int 2\,x'\,x''.\,dt = \int -\frac{2x'\,k^2}{x^3}\,.\,dt$$

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

لتعيين c_1 من شروط البدء $((t = 0 \quad x = a \quad x' = 0\,))$

بالتعويض في (1) نحصل على: $c_1 = -\frac{k^2}{a^2}$ $\qquad 0 = \frac{k^2}{a^2} + c_1$

ومنه: $x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} \dots\dots\dots (2)$

وبتوحيد المقامات نجد: $x' = \mp\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2\,a^2}$

$$x' = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$$

لنحصل على x نكامل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{ax}\sqrt{a^2 - x^2}$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

وبفصل المتحولات نجد: $\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}.\,dt$

نكامل الطرفين بعد أن نضرب ونقسم على (-2)

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2\,x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int -\frac{k}{a}.\,dt$$

$$-\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{k}{a}t + c_2 \dots\dots\dots (*)$$

لتعيين c_2 من شروط البدء$((\;t = 0 \;\;, x = a))$ نعوض في $(*)$ فنجد:

$$\sqrt{(a^2 - x^2\,)} = \frac{k}{a}\;\; t \qquad c_2 = 0 \qquad 0 = 0 + c_2$$

نربع الطرفين: $x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}\ t^2$ $\qquad a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}\ t^2$

$$\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{a}^2 - \frac{\mathrm{k}^2}{\mathrm{a}^2}\mathrm{t}^2}$$

2) لإيجاد الزمن لحظة وصول النقطة إلى الموضع o

من العلاقة $\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}dt$ نجد :

$$\left[-\sqrt{a^2 - x^2}\right]_a^0 = \left[-\frac{k}{a}t\right]_0^t \qquad \int_a^0 \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int_0^t \frac{k}{a}dt$$

$$t = \frac{a^2}{k} \qquad a = \frac{k}{a}t$$

السؤال الثالث : يدور إلكترون حول نواة ذرة بمسار دائري وبسرعة ثابتة v، أثرنا على هذا الإلكترون بقوة مماسة لمساره.

والمطلوب: تعيين السرعة الواجب تطبيقها على الإلكترون لكي يفلت من جذب النواة.

الحل

انطلاقاً من قانون المسار لقطع مخروطي $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e.cos(\theta)}{P}$ $\qquad r = \frac{P}{1+e.cos(\theta)}$

نطبق دستور بينيه الأول ((لأننا نريد حساب السرعة))

$$v^2 = c^2\left[{u'}^2 + u^2\right]$$

نوجد ((u')) من اشتقاق ((u)) فنجد.. $u' = -\frac{e\,sin(\theta)}{P}$ $\qquad u = \frac{1+e.cos(\theta)}{P}$

بتعويض كل من ((u' و u)) بدستور بينيه الأول.. $v^2 = c^2\left[\frac{e^2\,sin^2(\theta)}{P^2} + \frac{(1+e.cos\,\theta)^2}{P^2}\right]$

$$v^2 = c^2\left[\frac{e^2}{P^2} + \frac{2e\ cos(\theta)+1}{P^2}\right] \qquad v^2 = c^2\left[\frac{e^2\,sin^2(\theta)}{P^2} + \frac{1+e^2\,cos^2(\theta)+2e\,cos(\theta)}{P^2}\right]$$

انتبه $e^2\,sin^2\theta + e^2\,cos^2\theta = e^2(\sin^2\theta + cos^2\theta) = e^2$

نخرج P عامل مشترك من المقام ونضيف ونطرح 1 :

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1+1+1+2e\ \cos(\theta)}{P}\right] \qquad v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2+2e\ \cos(\theta)}{P}\right]$$

إذا كان المسار دائري فإن $e=0$ و $r=P$ ومنه

$$v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2}{r}\right]\dots(1) \qquad v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{e^2-1}{P}+\frac{2(1+e\ \cos\theta)}{P}\right]$$

$$v^2=\frac{c^2}{P^2} \qquad v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{-1}{r}+\frac{2}{r}\right]=\frac{c^2}{P}\left[\frac{1}{r}\right]$$

ولكي يفلت الإلكترون، يجب أن يكون مساره على شكل قطعٍ مكافئ لكي يبتعد عن النواة

ويكون المسار قطع مكافئ عندما نعوض $e=1$ في المعادلة (1)

$$v^2=\frac{2c^2}{P^2} \qquad v^2=\frac{c^2}{P}\left[\frac{2}{r}\right]$$

السؤال الرابع : في مستوي شاقولي OXY توجد نقطة ، معرفة بترتيبها $AOX=\alpha$ و M نقطة مادية كتلتها m. في لحظة واحدة قذفت النقطة M من o وفق OA وسرعة ابتدائية v_0 ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A . **برهن** أن المتحرِّكين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل P **ثم برهن** أن المستقيم MM' يبقى موازيا لاستقامة مفروضة ثم احسب طول هذا المستقيم

الحل

1) برهن أن المتحركين يتلاقيان في نقطة واحدة مثل ρ ،

شرط التلاقي هو $y_m=y'_m \quad , \quad x_m=x'_m$

لنحسب كل من $y'_m\ ,\ y_m\ ,\ x'_m\ ,\ x_m$

إن حركة M هي حركة قذيفة .

حسب الدراسة النظرية M في لحظة البدء كانت في المبدأ ، وكانت سرعة النقطة المادية v_0 تصنع زاوية مقدارها α مع ox ، وضمن هذه الشروط يكون لدينا :

$$x=y=z=0 \ ,\ \ x'=v_0.\cos\alpha \ \ ,y'=0\ ,z'=v_0.\sin\alpha$$

نعين الثوابت (لنحصل على نوع الحركة) لدينا

$$c_1=v_0.\cos\alpha \ \ ,c_2=c_4=c_5=c_6=0 \ \ ,c_3=v_0.\sin\alpha$$

نعوض في

$$x = c_1 t + c_4 \quad , \quad y = c_2 t + c_5 \quad , \qquad z = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_6$$

وبذلك قانون الحركة للنقطة المادية المقذوفة بالزاوية ((α))

$$x = v_0 t . \cos \alpha \quad , \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t . \sin \alpha$$

لنوجد حركة M' : إن حركة M' هي حركة نقطة تسقط سقوط حر

أولاً : الحركة على y : حسب قانون التحريك الاساسي $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

$$-mg = my'' \qquad -g = y'' \qquad -gt + c_1 = y'$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2 \; .... (1)$$

نحسب كلاً من c_1 , c_2 من شروط البدء (($t = 0$)) نجد $y = h$ $\qquad$ $y' = 0$

ومنه $c_1 = 0, \;\; c_2 = h$ وبتعويض بالعلاقة (1) نجد: $y = h - \frac{1}{2} g t^2$

ثانياً : الحركة على x

$$m x'' = 0 \qquad x'' = 0 \qquad x' = c_3 \qquad x = c_3 t + c_4$$

من شروط البدء (($t = 0$)) نجد :

$$\tan \alpha = \frac{h}{x} \qquad x = \frac{h}{\tan \alpha} \qquad x = h . \cot \alpha \; .... (2)$$

ومنه $c_4 h . \cot \alpha$, $c_3 = 0$ وبالتعويض بالعلاقة (2) نجد : $x = h . \cot \alpha$

ومنه نطبق قانون التلاقي :

$$x_{m'} = x_m \qquad h . \cot \alpha = v_0 . t \cos \cot \alpha \qquad t = \frac{h}{v_0 \sin \alpha}$$

$$y_{m'} = y_m \qquad v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad t = \frac{h}{v_0 \sin \alpha}$$

ومنه في اللحظة $t = \frac{h}{v_0 \sin \alpha}$ تتساوى فاصلة وترتيب كل من المتحركين مما يدل على تلاقيهما

2) لنبرهن ان المستقيم MM' يبقى موازياً يكفي ان نثبت أن مياو طوال الزمن

$$\mu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \sin\alpha + \frac{1}{2}gt^2}{h\cot\alpha - v_0 . t\cos\alpha} = \frac{g - v_0 . t\sin\alpha}{h\cot\alpha - v_0 . t\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha\left(\frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha} - v_0 t\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha} - v_0 t\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

2) لنأخذ المثلث الصغير من الرسم نلاحظ أن : وهو حساب طول المستقيم

$$\cos\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \left|\frac{x_{m'} - x_m}{\cos\alpha}\right|$$

لم يتم حل هذا التمرين بالمقرر لكن تم تعليقه من قبل الدكتور

في العام الماضي

" دورة الفصل الثاني 2016 "

السؤال الأول : 1) لتكن M نقطة مادية في لحظة البدء كانت متوضعة في مبدأ جملة احداثية ديكارتية فيها oz شاقولي صاعد وسرعة النقطة المقذوفة v_0 واللحظة الواقعة في المستوي oxz وتصنع زاوية قدرها $\alpha \geq 0$ مع المحور ox . ادرس حركة النقطة المادية في وسط مقاوم حيث تخضع النقطة المادية لمقاومة متناسبة مع السرعة من الشكل $R = -mkv$ حيث k عامل ثابت يتعلق بطبيعة الوسط و m كتلة النقطة المادية

2) اشرح مبدأ دلامبير -لاغرانج

السؤال الثاني : AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء بحيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الافقي oxy اما نهايته B فتنزلق بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ، M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب .

والمطلوب : **اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .**

السؤال الثالث : لتكن M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد $F = -m\,\frac{k^2}{x^3}$.

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء:

$$t = 0 \quad , \quad x = a \quad , \quad x' = 0$$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة للموضع o (مركز الإحداثيات) ؟

السؤال الرابع : أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

انتهت الأسئلة ☺

" ^_^ الحل "

السؤال الأول : 1) لتكن M نقطة مادية في لحظة البدء كانت متوضعة في مبدأ جملة احداثية ديكارتية فيها oz شاقولي صاعد وسرعة النقطة المقذوفة v_0 واللحظة الواقعة في المستوي oxz وتصنع زاوية قدرها $\alpha \geq 0$ مع المحور ox . ادرس حركة النقطة المادية في وسط مقاوم حيث تخضع النقطة المادية لمقاومة متناسبة مع السرعة من الشكل $R = -mkv$ حيث k عامل ثابت يتعلق بطبيعة الوسط و m كتلة النقطة المادية

2) اشرح مبدأ دلامبير -لاغرانج

الحل

1) حسب قانون التّحريك الأساسي لدينا: $m\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$

$$mx'' = -mkx' \quad , \quad my'' = 0 \quad , \quad mz'' = -mg - mkz'$$

نقسِّم على m : $x'' = -kx' \dots\dots\dots (1)$, $z'' = -g - kz' \dots\dots\dots (2)$

وهي المعادلات التفاضليّة للحركة، نحلّها:

<u>لنأخذ المعادلة (1):</u> $\frac{dx'}{dt} = -kx'$ $\quad x'' = -kx'$

وهي معادلة تفاضليّة قابلة لفصل المتحوِّلات:

$$ln|x'| = -kt + c_1 \qquad \frac{dx'}{x'} = -k\,dt$$

نعين c_1 من شروط البدء...

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha \,, y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه: $c_1 = ln(v_0 \cos\alpha)$

نعوِّض بالمعادلة فنجد: $ln|\,x'| = -kt + ln(v_0 \cos\alpha)$

$$\frac{x'}{v_0 \cos\alpha} = e^{-kt} \qquad ln\left|\frac{x'}{v_0 \cos\alpha}\right| = -kt$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-kt} \cos\alpha \qquad x' = v_0\, e^{-kt} \cos\alpha$$

$$dx = (v_0\, e^{-kt} \cos\alpha).\, dt$$

بالمكاملة نجد: $x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + c_2$

نعين c_2 من شروط البدء نحتاج الشروط: $x = 0\ ,\ t = 0$ ونعوض ...

$$0 = -\frac{v_0}{k} e^{0} \cos\alpha + c_2 \qquad 0 = -\frac{v_0}{k} \cos\alpha + c_2 \qquad c_2 = \frac{v_0}{k} \cos\alpha$$

بالتعويض نجد:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + \frac{v_0}{k} \cos\alpha \qquad x = \frac{v_0}{k} \cos\alpha\,(1 - e^{-kt})$$

<u>لنأخذ المعادلة (2):</u> $\frac{dz'}{dt} = -(g + kz')$ $\qquad z'' = -g - kz'$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات: $\frac{dz'}{g+kz'} = -dt$

بضرب الطرفين بـ k ثم المكاملة:

$$\ln|g + kz'| = -kt + c_3$$

نعين c_3 من شروط البدء:

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha\,, y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

بذلك نجد أن: $c_3 = \ln|g + kv_0 \sin\alpha|$

ومنه بالتعويض: $\ln|g + kz'| = -kt + \ln|g + kv_0 \sin\alpha|$

وبالتالي:

$$\ln\left|\frac{g+kz'}{g+kv_0 \sin\alpha}\right| = -kt \qquad \frac{g+kz'}{g+kv_0 \sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$g + kz' = (g + kv_0 \sin\alpha)\, e^{-kt} \qquad kz' = (g + kv_0 \sin\alpha)\, e^{-kt} - g$$

نقسم الطرفين على k فنحصل على:

$$z' = \frac{(g + kv_0 \sin\alpha)}{k}\, e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} \qquad dz = \left(\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt}\right) dt - \frac{g}{k} dt$$

بالمكاملة نجد:

$$z = -\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + c_4$$

نعين c_4 من شروط البدء:

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha , y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

فنجد أن :

$$c_4 = \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2}$$

وبالتالي:

$$z = -\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2}$$

$$z = \frac{1}{k^2}(g + kv_0 \sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

2) لتكن M نقطة مادية كتلتها m تؤثر فيها قوة فعالة $\vec{F}$ وقوى الربط محصلتها $\vec{R}$ ولنكتب مبدأ دالا امبير لهذه النقطة $\vec{F} - m\vec{\Gamma} + \vec{R} = 0$ نضرب عددياً طرفي هذه العلاقة بـــ δ_r فنجد..

$\left(\vec{F} - m\vec{\Gamma} + \vec{R}\right) \delta_r = 0$ وإذا فرضنا أن الارتباط مثالي يكون لدينا $\vec{R} . \delta_r = 0$

وبالتالي تصبح العلاقة $\left(\vec{F} - m\vec{\Gamma}\right) \delta_r = 0$ وهي معادلة دالا امبير لاغرانج.

ويمكن أن تكتب على الشكل التالي بعد الإسقاط ....

$$(F_x - mx'')\delta_x + (F_y - my'')\delta_y + (F_z - mz'')\delta_z = 0$$

هنا لدينا النقطة المادية مقيدة $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ ليست مستقلة الارتباطات أي أن هذه الارتباطات ترتبط مع بعضها البعض بعلاقة من الشكل :

$\frac{\partial f}{\partial x} \delta_x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta_y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta_z = 0$ لأن أمثالها ليس أصفاراً

في حالة خاصة إذا كانت أمثالها تساوي الصفر يكون الارتباطات مستقلة خطياً ((تكون النقطة المادية طليقة))

$$mx'' = F_x \ , \ my'' = F_y \ , mz'' = F_z$$

ومنه نحصل على $m\Gamma = F$ وهو قانون نيوتن الثاني .

من معادلة دالا امبير لاغرانج $(\vec{F} - m\vec{\Gamma}).\vec{\delta_r} = \vec{0}$

بعض المؤلفين يعتبرون هذه المعادلة أنها مبدأ اساسي في الميكانيك ((مثل نيوتن و دالا امبير)) ويطلق على هذا المبدأ ((المبدأ الديناميكي للانتقالات الافتراضية)) تمييزاً له عن المبدأ التوازني الذي يتعلق بتوازن النقطة المادية والذي ينص على أن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية خاضعة لارتباطات مثالية هو أن يكون العمل الافتراضي الجزئي للقوة الفعالة المؤثرة عليها يساوي إلى الصفر $(\vec{F}.\vec{\delta_r} = \vec{0})$ وهذا ما يطلق عليه مبدأ دالا امبير .

السؤال الثاني والثالث :

>> تم حل الثاني في الدورة الإضافية 2015 اما الثالث تم حله

في دورة الفصل الاول 2016 <<

السؤال الرابع : أوجد القوة المركزية لنقطة مادية مسارها القطع المخروطي $r = \frac{P}{1+e\cos(\theta)}$

الحل

لإيجاد القوة المؤثرة نستخدم دستور بينيه الثاني : $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

حيث : $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta)}{P}$

$$u'' = -\frac{e\cos(\theta)}{P} \qquad u' = -\frac{e\sin(\theta)}{P}$$

نعوض كل من ((u', u'')) في قانون التحريك الأساسي

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(-\frac{e\cos(\theta)}{P} + \frac{1+e\cos(\theta)}{P}\right)$$

$$F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\left(\frac{1}{P}\right)$$

وبما أن $u^2 = \frac{(1+e.\cos\theta)^2}{P^2}$ $\qquad u = \frac{1+e.\cos(\theta)}{P}$

$$F = -m.c^2.u^2\left(\frac{1}{P}\right)$$

ونعلم أيضاً أنَ : $u = \frac{1}{r}$ $\quad u^2 = \frac{1}{r^2}$

وبالتالي : $F = -m.\frac{c^2}{\rho r^2}$

" انتهى حل الدورة "

" الدورة الإضافية 2016 "

السؤال الأول : برهن أن عبارة الطاقة الحركية في الحركة النسبية تعطى بالشكل :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overrightarrow{F}.dr + \overrightarrow{J_e}.dr$$

السؤال الثاني : ادرس حركة نقطة مادية على منحن ثابت بوجود احتكاك .

السؤال الثالث : تتحرك نقطة مادية على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية تتجه دوماً نحو محيط الدائرة فإن هذه القوة جاذبة تتناسب عكساً مع القوة الخاصة للبعد. $r = 2\,\mathrm{a}\cos\theta$.

السؤال الرابع : يتحرك زورق كتلته M وفق المعادلة $x = v_0\,\frac{m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

حيث : v_0 السرعة الابتدائية للزورق و a مقدار ثابت.

المطلوب: أوجد مقاومة الماء التي يتلقاها الزورق من الماء

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول : برهن أن عبارة الطاقة الحركية في الحركة النسبية تعطى بالشكل :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr$$

<<تم حل السؤال الاول والثاني في دورة الفصل الثاني 2015>>

السؤال الثالث : تتحرك نقطة مادية على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية تتجه دوماً نحو محيط الدائرة فإن هذه القوة جاذبة تتناسب عكساً مع القوة الخاصة للبعد. $r = 2\ \cos\theta$.

الحل

حسب قانون التحريك الأساسي: $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

وحسب دستور بينيه الثاني: $F = -mc^2u^2(u'' + u)$

نعلم أن $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2\cos(\theta)}$

نشتق بالنسبة لـ θ :

$$u' = \frac{2\sin(\theta)}{(2)^2\cos^2(\theta)} \qquad u' = \frac{\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta)} \qquad u'' = \frac{2\cos^3(\theta)+4\sin^2(\theta)\cos(\theta)}{(2)^2\cos^4(\theta)}$$

بِسحب $2\cos(\theta)$ عامل مُشترك :

$$u'' = \frac{2\cos(\theta)[\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)]}{(2)^2\cos^4(\theta)}$$

نجد ...

$$u'' = \frac{\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)}{2\cos^3(\theta)}$$

نعوِض في القانون:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)}{2\cos^3(\theta)} + \frac{1}{2\ \cos(\theta)}\right]$$

لتوحيد المقامات نضرب البسط والمقام $\left(\frac{1}{2\cos(\theta)}\right)$ بـ $\cos^2(\theta)$

فنجد:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{\cos^2(\theta)+2\sin^2(\theta)}{2\cos^3(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{2\ \cos^3(\theta)}\right]$$

انتبه
$$cos^2(\theta) + 2\,sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 2(sin^2(\theta) + cos^2(\theta)) = 2$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{cos^3(\theta)}\right] \qquad F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{2}{2\,cos^3(\theta)}\right]$$

ولدينا من السؤال معادلة المسار $r = 2\,cos(\theta)$ $\qquad cos(\theta) = \frac{r}{2}$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{(2)^3}{r^3}\right] \qquad F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^3}\right]$$

$$F = -\frac{8mc^2}{r^5} \qquad F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{8}{r^3}\right] = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{8}{r^3}\right]$$

و هي قوة جاذبة لأنها سالبة تتناسب عكساً مع القوّة الخامسة للبعد.

السؤال الرابع : يتحرك زورق كتلته M

وفق المعادلة $x = v_0\,\frac{m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

حيث : v_0 السرعة الابتدائية للزورق و a مقدار ثابت.

المطلوب: أوجد مقاومة الماء التي يتلقاها الزورق من الماء

الحل

حركة الزورق مستقيمة على المحور ox. والقوى التي تطبق عليه هي:

mg وزن القارب $\vec{R}$ ورد الفعل و $\vec{F}$ القوى المؤثرة عكس مسار الزورق (مقاومة)

حسب قانون التحريك الاساسي: $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد: $F_x = m\,x''$ $\qquad m\,\Gamma_x = F_x$

وبالتالي حسب العلاقة السابقة : $x = v_0\,\frac{m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{m}t}\right)$

نشتق ..... $x'' = -\frac{a}{m}x'$ $\qquad x" = -v_0\,\frac{a}{m}e^{-\frac{a}{m}t}$ $\qquad x' = v_0 e^{-\frac{a}{m}t}$

$$F = -ax' \qquad F_x = -ax' \qquad F_x = m.x''$$

هذه القوى الذي يتلقاها القارب على سطح الماء (مقاومة)

" دورة الفصل الأول 2017 "

السؤال الأول : 1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية .

2) ادرس حركة النقطة المادية كتلتها m على منحن بوجود احتكاك

السؤال الثاني : في لحظة وقف محرك زورق كانت سرعته v_0 يتعرض هذا الزورق لمقاومة من الماء تساوي $R = -\alpha x' - \beta x'^2$ حيث α, β ثوابت موجبة .

1) برهن أن الزورق لن يتوقف ابداً .

2) ماهي الفترة الزمنية اللازمة حتى تصبح سرعة الزورق مساوية $\frac{v_0}{3}$

السؤال الثالث : علق في الطرف السفلي B لنابض شاقولي جسم وزنه P أما الطرف الاخر A للنابض فمثبت في موضع A يزداد طول النابض بمقدار δ نتيجة لتعليق الجسم عند توازنه وتهمل مقاومة الوسط .

أوجد قانون الحركة الاهتزازية لهذا الجسم اذا ترك يسقط دون سرعة ابتدائية .

انتهت الأسئلة ☺

اسئلة الدورة الثانية 2017

السؤال الأول :

1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية.

2) اكتب قوانين كلبر ثم بين أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما وعكسا مع مربع البعد بينهما.

السؤال الثاني :

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد اي $F = -\frac{mk^2}{x^3}$

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء في اللحظة $t = 0$ بحيث تركت النقطة بدون سرعة ابتدائية $(t = 0 , x = a , x' = 0)$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع (o) بداية الحركة .

السؤال الثالث :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونصف قطرها a أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النقطة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

السؤال الرابع :

توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري افقي نصف قطره a .أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f فالمطلوب تعيين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف.

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول

1) برهن أن العمل الجزئي في الحركة النسبية يساوي العمل الجزئي للقوى المؤثرة على النقطة المادية ، بالإضافة للعمل الجزئي لقوى عطالتها الجرية

انطلاقاً من معادلة التحريك الاساسية $m\vec{\Gamma} = \vec{F} + \vec{J_e} + \vec{J_c}$

في الحركة النسبية لا تختلف عن معادلة التحريك في الحالة العامة $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

إلا بإضافة الحدين ($\vec{J_e}\, , \vec{J_c}$)

مثلاً إذا أخذنا كمية الحركة $;(v = v_a)$ $\qquad d(mv) = F.dt$

أما الحركة النسبية $;(v = v_r)$ $\qquad d(mv) = F.dt + J_e.dt + J_c\,.dt$

كذلك في الطاقة الحركية $;(v = v_a)$ $\qquad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr$

وفي حالة الحركة النسبية $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F.dr + J_e.dr + J_c\,.dr$

لدينا : $J_c.dr = (-m\Gamma_c)dr = -2m(\omega \times v_r)dr = -2m\left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right)dr = 0$

لأن $(\frac{dr}{dt}, dr)$ شعاعان متوازيان

وأصبحت لدينا نظرية الطاقة الحركية $\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}.dr + \vec{J_e}.dr}$

و هي عبارة عن الطاقة الحركية للحركة النسبية.

2) اكتب قوانين كلبر ثم بين أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما بقوة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما وعكسا مع مربع البعد بينهما.

الحل

يوجد في ميكانيك السماوي ثلاثة قوانين توصل لها العالم كبلر اعتماداً على كثير من التجارب الفلكية وتنص هذه القوانين على ما يلي:

القانون الأول : تتحرك الكواكب حول الشمس ومسار كل منها مستوي وحركتها تكون خاضعة لقانون السطوح .

القانون الثاني : مسار كل كوكب قطع ناقص تقع الشمس في إحدى محرقيه.

القانون الثالث : مربع دور حركة كل منها يتناسب عكساً مع مكعب نصف المحور الكبير للقطع الناقص

المعطى بالعلاقة....... $\boxed{F = -\frac{mc^2}{r^2P}}$

حسب قانون الفعل ورد الفعل يكون $F_1 = F_2 = |F| \dots (1)$

إذاً $\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda_n}{m_n} = const \Longrightarrow -\frac{\mu m}{r^2} = -\frac{\lambda M}{r^2}$

حيث $f = \frac{\lambda_n}{m_n}$ تسمى نسبة غاوس الثابتة لكل كوكب ما على كتلته .

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f$$

$$\mu = fM \qquad ; \qquad \lambda = fm$$

وبالتالي بتعويض قيمة (λ , μ) بالمساواة (1) نحصل على القانون :

$$\frac{\mu m}{r^2} = \frac{\lambda M}{r^2} \Longrightarrow \boxed{F = f\frac{Mm}{r^2}}$$

هذه الصيغة تبين أن قانون التجاذب الشهير الذي ينص على أن كل جسمين ماديين يتجاذبان بعضهما البعض بقوى تتناسب طرداً مع جداء كتلتيهما و عكساً مع مربع البعد بينهما و هو قانون التجاذب العالمي

السؤال الثاني

M نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد اي $F = -\frac{mk^2}{r^3}$

1) أكتب المعادلة التفاضلية للحركة وحل هذه المعادلة ضمن شروط البدء في اللحظة $t = 0$ بحيث تركت النقطة بدون سرعة ابتدائية $(t = 0 , x = a , x' = 0)$

2) ما هو الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع (o) بداية الحركة .

الحل

1) حسب قانون التحريك الأساسي $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على المحور ox نجد : $x'' = -\frac{k^2}{x^3} \Longrightarrow -\frac{mk^2}{x^3} = m\,x''$

و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية .لحلها نضرب الطرفين بـ $2x'$ فنجد :

$$\boxed{2x'.x'' = -\frac{2x'k^2}{x^3}}$$

بالمكاملة نجد : $x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \dots\dots (*)$

لإيجاد الثابت c_1 من شروط البدء $((x = a \ , \ v = x' = 0))$ نجد :

$$0=\frac{k^2}{a^2}+c_1 \Rightarrow c_1=-\frac{k^2}{a^2}$$

بتعويض قيمة (c_1) بالمعادلة $(*)$ نجد :

$$x'^2=\frac{k^2}{x^2}-\frac{k^2}{a^2} \xRightarrow{\text{بتوحيد المقامات}} x'^2=\frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2.a^2}$$

بجذر التربيع نجد
$$x'=\pm\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$

نختار الإجابة السالبة لان القوة جاذبة نحو (o) .

ومنه
$$x'=-\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$

و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات من المرتبة الأولى .

$$\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{k}{a}dt \Rightarrow -\sqrt{a^2-x^2}=-\frac{k}{a}t+c_2$$

لإيجاد الثابت (c_2) من شروط البدء نجد :
$$\sqrt{a^2-a^2}=\frac{k}{a}(0)+c_2 \Rightarrow c_2=0$$

ومنه
$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{k}{a}t \Rightarrow a^2-x^2=\frac{k^2}{a^2}t^2 \Rightarrow -x^2=\frac{k^2}{a^2}t^2-a^2$$

وبالتالي معادلة الحركة هي
$$x^2=a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2 \xRightarrow{\text{بجذر}} x=\pm\sqrt{a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2}$$

نأخذ الاشارة الموجبة ((لأن الحركة للأمام))
$$\boxed{x=\sqrt{a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2}}$$

(2 لإيجاد الزمن لحظة وصول النقطة إلى الموضع o

من العلاقة $\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{k}{a}dt$ نجد :

$$\int_a^0\frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int_0^t\frac{k}{a}dt \Rightarrow \left[-\sqrt{a^2-x^2}\right]_a^0=\left[-\frac{k}{a}t\right]_0^t$$

$$a=\frac{k}{a}t \Rightarrow \boxed{t=\frac{a^2}{k}}$$

السؤال الثالث

لتكن M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك دائري يدور حول محورها بسرعة زاوية ثابتة ω ، ونصف قطرها a أكتب المعادلة التفاضلية لحركة النقطة وذلك بتطبيق معادلات لاغرانج.

نقطة تتحرك على سلك فإن له محور احداثي فقط . (($q = \theta$ إحداثي معمم))

$$x = a.\cos\theta \quad , \quad y = a.\sin\theta$$

الحل

حسب معادلة لاغرانج $\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T+u)}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial (T+u)}{\partial \theta} = 0$$

ولدينا : $v_r^2 = x'^2 + y'^2 \Longleftarrow v_r = x'\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad ; \quad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$$x' = -a.\sin\theta\,.\theta' \quad , \quad y' = a.\cos\theta\,.\theta'$$

$$v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + a^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2$$

$$v_r^2 = a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,.\theta'^2 \Longrightarrow v_r^2 = a^2.\theta'^2$$

$$u = -\int mg\,dy = -mg\,y \Longrightarrow u = -mg.a.\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad ; \quad v_a = v_r + v_e$$

$$v_e = (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \boxed{v_e = -\omega x\,\vec{k}}$$

$$v_e^2 = \omega^2 a^2.\cos^2\theta$$

$$v_a^2 = v_r^2 + v_e^2 \Longrightarrow v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 x^2$$

$$\boxed{v_a^2 = a^2.\theta'^2 + \omega^2 a^2.\cos^2\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}ma^2.\theta'^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2.\cos^2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta' \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -m\omega^2 a^2.\cos\theta\,.\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mga.\cos\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial \theta'} = ma^2.\theta''$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$ma^2.\theta'' + m\omega^2 a^2.\cos\theta\,.\sin\theta + mga.\cos\theta = 0$$

$$\boxed{ma[a\,\theta'' + \omega^2 a\cos\theta\,.\sin\theta + g.\cos\theta] = 0}$$

السؤال الرابع

توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري افقي نصف قطره a. أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f فالمطلوب : تعيين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف.

الحل

- لنأخذ مبدأ القياس موضع الحلقة لحظة البدء.
- القوى المؤثرة:
  - ✓ المقاومة R_τ التي جهتها بعكس اتجاه الحركة.
  - ✓ رد الفعل الناظمي R_N الواقع في المستوي النظامي.
  - ✓ قوة الثقل $P = mg$

في هذه الحالة بإسقاط علاقة التحريك الأساسي نحصل على المعادلات الذاتية لحركة الحلقة:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -R_\tau \quad , \quad m\frac{v^2}{\rho} = R_n \quad , \quad 0 = R_b - P}$$

بما أن: $R_\tau = f|R_N| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}$

لدينا من المعادلات الذاتية: $R_n = m\frac{v^2}{\rho}$ و $R_b = P = mg$

$$\Rightarrow R_\tau = mf\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + g^2}$$

$$\Rightarrow R_\tau = \frac{\boldsymbol{mf}}{\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{v^4 + a^2 g^2}}$$

حيث أن نصف قطر تقوس الدائرة يساوي a

ومن أجل المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف نكتب الطرف الأيسر بالاعتماد على المعادلات الذاتية بالشكل:

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds}=m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{m\frac{dv}{ds}\,v}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m\frac{dv}{ds}\,v=-\frac{mf}{a}\sqrt{v^4+a^2g^2}}$$

بتقسيم الطرفين على m:

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{f}{a}\sqrt{v^4+a^2g^2}$$

بفصل المتحولات:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv^2}{\sqrt{v^4+a^2g^2}}=-\frac{2f}{a}\int_0^s ds$$

بالمكاملة:

$$s=\frac{a}{2f}ln\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+a^2g^2}}{v^2+\sqrt{v^4+a^2g^2}}$$

وفي لحظة توقف الحلقة عن الحركة يكون لدينا $v=0$ وبالتالي نجد أن المسافة المطلوبة:

$$s^*=\frac{a}{2f}ln\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+a^2g^2}}{ag}$$

ملاحظة هامة:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\operatorname{arcsh}\left(\frac{x}{a}\right)+c=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+c$$

" انتهى حل الدورة ^_^ "

اسئلة الدورة التكميلية 2017

السؤال الأول :

ادرس حركة نقطة مادية M على المستقيم ox بافتراض أن النقطة تخضع لقوة من الشكل $F=-cx$ حيث c ثابت موجب .

السؤال الثاني :

لتكن M نقطة مادية ثقيلة تتحرك على دائرة شاقولية من الداخل نصف قطر هذه الدائرة a فاذا علمت أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء في أخفض مكان على الدائرة وأعطيت سرعة ابتدائية افقية مقدارها $v_0 \neq 0$ وأن الحركة تتم بدون احتكاك فالمطلوب :

1) تحديد سرعة النقطة المادية ثم ايجاد رد الفعل .

2) ايجاد شرط انفكاك النقطة عن الدائرة .

السؤال الثالث :

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على الحلزون للغاريتمي الافقي $r=e^{-\theta}$ مجذوبة من القطب o بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب وقيمتها $\vec{F}=-2m\vec{r}$ تُركت النقطة المادية بدون سرعة ابتدائية من موضع M_0 حيث $\theta=0$ ، أوجد حركة النقطة المادية بالاعتماد على تكامل الطاقة .

السؤال الرابع :

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب $F=-\mathit{k}OM$ أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول

ادرس حركة نقطة مادية M على المستقيم ox بافتراض أن النقطة تخضع لقوة من الشكل $F = -cx$ حيث c ثابت موجب .

الحل ^_^

بالانطلاق من قانون التحريك الاساسي (قانون نيوتن الثان) $\sum \vec{F} = m\vec{\Gamma}$

$$mx'' = -cx \Rightarrow x'' = -\frac{c}{m}x$$

نرمز ل $((\frac{c}{m}))$ ب k^2 .. $\boxed{x'' = -k^2x}$ .....(*)

و هي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة وبدون طرف ثاني تقبل حل من الشكل ..

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$

لإيجاد الحل العام نفرض الحلول الخاصة من الشكل: $x = e^{\lambda t}$

نوجد x'' ونعوضها في (*).... $x' = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

فنجد : $\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0$

ومنه المعادلة المميزة هي ... $\lambda^2 + k^2 = 0$

وجذرها $\lambda_1 = -ik$, $\lambda_2 = ik$ حيث λ_1, λ_2 جذور المعادلة المميزة

نعوض λ_1, λ_2 بالمعادلة التفاضلية.. $x = c_1e^{ikt} + c_2e^{-ikt}$

نعلم أن: $e^{ikt} = \cos kt + i\sin kt \quad \&\& \quad e^{-ikt} = \cos kt - i\sin kt$

$$x = (c_1\cos kt + c_1 i\sin kt) + (c_2\cos kt - c_2 i\sin kt)$$

$$x = (c_1 + c_2)\cos kt + (c_1 - c_2)i\sin kt$$

بفرض $(c_1 + c_2) = A \quad \&\& \quad (c_1 - c_2)i = B$

فتصبح.. $\boxed{x = A\cos kt + B\sin kt}$ وهي معادلة الحركة الاهتزازية

السؤال الثاني

لتكن M نقطة مادية ثقيلة تتحرك على دائرة شاقولية من الداخل نصف قطر هذه الدائرة a فاذا علمت أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء في أخفض مكان على الدائرة وأعطيت سرعة ابتدائية افقية مقدارها $v_0 \neq 0$ وأن الحركة تتم بدون احتكاك فالمطلوب :

1) تحديد سرعة النقطة المادية ثم ايجاد رد الفعل .
2) ايجاد شرط انفكاك النقطة عن الدائرة .

الحل ^_^

1) لنأخذ المحورين ox, oy في مستوي الدائرة ، مبدأهما في مركز الدائرة والمحور oy شاقولي صاعد ، يتحدد وضع النقطة M على الدائرة بوسيط واحد ، ولتكن الزاوية θ المحصورة بين oM والمحور ox .

نطبق نظرية الطاقة الحركية من أجل تحديد السرعة :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg.dy \Rightarrow \frac{m}{2}d(v^2) = -mg.dy$$

$$\Rightarrow d(v^2) = -2g.dy \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

حيث $y_0 = -a$ حسب شروط البدء وعليه فإن سرعة النقطة M هي

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y + a)$$

أما من أجل تحديد رد الفعل الناظمي (N) نستخدم المعادلة الثانية من المعادلات الذاتية وهي :

$$\frac{mv^2}{\rho} = F + N \Rightarrow \frac{mv^2}{\rho} = mg.a\sin\theta + N$$

حيث : $F = mg.y = 0$ ، وبما أن الحركة دائرة فإن $\rho = a$ و $y = a.\sin\theta$ نجد :

$$\frac{mv^2}{a} = mg.y + N \Rightarrow N = \frac{m}{a}\left(v_0^2 - 2g(y + a)\right) - mgy$$

$$\Rightarrow N = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g) - mgy$$

2)

تستطيع النقطة الانفكاك عن الدائرة عند تحقق شرط $N = 0$ إذاً يجب أن تتحقق المساواة :

$$0 = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g) - mgy$$

وعليه النقطة المادية تنفك في الموضع $M(x, y)$

$$\Rightarrow mgy = \frac{m}{a}(v_0^2 - 2gy - 2a.g)$$

$$\Rightarrow gya = v_0^2 - 2gy - 2a.g$$

$$\Rightarrow gya + 2gy = v_0^2 - 2a.g$$

$$y(ga - 2g) = v_0^2 - 2a.g \Rightarrow y = \frac{(v_0^2 - 2a.g)}{(ga - 2g)}$$

إن معادلة الدائرة هي $x^2 + y^2 = a^2$ ومنه

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

والانفكاك على محيط الدائرة في المحل $-a < y < a$

$$-a < \frac{(v_0^2 - 2a.g)}{(ga - 2g)} < a$$

$$\Rightarrow -a(ga - 2g) < (v_0^2 - 2a.g) < a(ga - 2g)$$

$$\Rightarrow -(ga - 2g) + 2a.g < v_0^2 < a(ga - 2g) + 2a.g$$

إن $v_0^2 > -a(ga - 2g) + 2a.g$ محقق دوماً

أما الشرط $v_0^2 < a(ga - 2g) + 2a.g$ فيجب أن يتحقق من أجل أن تنفصل النقطة عن الدائرة .

السؤال الثالث

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على الحلزون للغاريتمي الافقي $r = e^{-\theta}$ مجذوبة من القطب o بقوة متناسبة مع بعد هذه النقطة عن القطب وقيمتها $\vec{F} = -2m\vec{r}$ تُركت النقطة المادية بدون سرعة ابتدائية من موضع M_0 حيث $\theta = 0$ ، أوجد حركة النقطة المادية بالاعتماد على تكامل الطاقة .

الحل ^_^

القوة المؤثرة على النقطة المادية هي قوة الثقالة $p = mg$ والقوة $\vec{F} = -2m\vec{r}$

حسب ما وجد بالمثالين السابقين ((المثال (1) والمثال (2))) أن القوة الثقالة هي قوة كمونية والقوة F هي قوة كمونية $u = \int p\,.dr + \int F\,.dr$

حيث $\int p\,.dr = 0$ اي معدومة لان القوة عامودية على الانتقال .

وحسب المثال السابق (2) وجدنا $u = -mr^2$

ونعلم أن قانون تكامل الطاقة يعطى بالعلاقة التالية : $T = u + h$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mr^2 + h \dots(*)$$

وحسب الشروط الابتدائية $(\theta = 0, v = 0)$ ومنه $r = 1$ نجد : $h = m$

وبتعويض $h = m$ بالمعادلة $(*)$ نجد : $\frac{1}{2}mv^2 = -mr^2 + m$

$$\frac{1}{2}mv^2 = m(1 - r^2) \Rightarrow v^2 = 2(1 - r^2)\dots(1)$$

$$\boxed{v^2 = r'^2 + r^2\theta'^2} \quad ; \quad r' = -e^{-\theta}.\theta'$$

$$v^2 = e^{-2\theta}.\theta'^2 + e^{-2\theta}.\theta'^2 \Rightarrow v^2 = 2e^{-2\theta}.\theta'^2 \Rightarrow v^2 = 2r'^2 \dots(2)$$

بمساواة العلاقة (1) والعلاقة (2) نجد : $2r'^2 = 2(1 - r^2)$

$$\Rightarrow r'^2 = (1 - r^2) \Rightarrow r' = \sqrt{(1 - r^2)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى قابلة لفصل المتحولات :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{(1 - r^2)} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{(1 - r^2)}} = dt \Rightarrow \boxed{t = arc\sin r}$$

تعود النقطة المادية إلى القطب o في اللحظة $t = 0$ عندما يكون $r = 0$

$$r = \sin t$$

السؤال الرابع

ليكن OX, OY محوران متعامدان OY شاقولي صاعد M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص تؤثر في نقطة مادية M قوة مركزية متناسبة مع بعد نقطة عن مركز الجذب $F = -\lambda OM$ أكتب معادلات الحركة للنقطة المادية M إذا فرضنا أن المستوي يدور حول المحور OY الثابت في الفراغ بدوران منتظم سرعته ω وذلك حسب معادلات لاغرانج .

الحل ^_^

نعلم أن معادلات القطع الناقص هي : $x = a.\cos\theta \quad , \quad y = b.\sin\theta$

نعلم أن معادلة لاغرانج $\boxed{\frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial(T+u)}{\partial q_j} = 0}$

القوة الجاذبة مركزية $F_1 = -m\,\lambda^2 r$ ، وقوة الثقل $P = mg$

ونعلم أن الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_e^2)$ $\qquad T = \frac{1}{2}mv_a^2$

$y' = b\cos\theta\,.\theta' \quad , \quad x' = -a\sin\theta\,.\theta'$

ومنه السرعة النسبية $\boxed{v_r^2 = a^2.\sin^2\theta\,.\theta'^2 + b^2.\cos^2\theta\,.\theta'^2} \Leftarrow v_r^2 = x'^2 + y'^2$

والسرعة الجرية $\vec{v_e} = \omega \wedge oM = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x\vec{k}$

$$\vec{v_e} = -\omega\, a\cos\theta\,.\vec{k} \Rightarrow \boxed{v_e^2 = \omega^2.a^2.\cos^2\theta}$$

بتعويض في قانون الطاقة الحركية نجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m[(a^2.\sin^2\theta + b^2.\cos^2\theta).\theta'^2 + \omega^2.a^2.\cos^2\theta]}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta' \quad , \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial T}{\partial\theta'} = m(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\theta''$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = m(a^2\sin\theta\cos\theta - b^2\cos\theta\,.\sin\theta)\theta'^2 - \omega^2a^2\cos\theta\,.\sin\theta$$

القوة M تخضع لقوتين((u_1 هي قوة الثقل و u_2 قوة الجذب)) واخذنا الثقل سالب لانه عكس دوران oy

$$u_1 = -\int mg\;dy = -mgy \Rightarrow u_1 = -mgb\sin\theta$$

$$u_2 = -\int m\lambda^2 r.dr \Rightarrow u_2 = -m\lambda^2\frac{r^2}{2}$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2} oM^2 \Longrightarrow u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$u_2 = -\frac{m\lambda^2}{2}(a^2 . cos^2\theta + b^2 . sin^2\theta)$$

$$u = u_1 + u_2 \Longrightarrow \boxed{u = -mgb\, sin\,\theta - \frac{m\lambda^2}{2}(a^2 . cos^2\theta + b^2 . sin^2\theta)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -mgb.\cos\theta + m\lambda^2 a^2 .\cos\theta\,.\sin\theta - m\lambda^2 b^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta$$

نعوض في معادلة لاغرانج فنجد :

$$(a^2\sin^2\theta + \mathrm{b}^2\cos^2\theta)\theta'' = (a^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta - b^2\cos\theta\,.\sin\theta)\theta'^2$$
$$-\omega^2 a^2\cos\theta\,.\sin\theta - gb.\cos\theta + \lambda^2 a^2 .\cos\theta\,.\sin\theta - \lambda^2 b^2\, sin\,\theta\, cos\,\theta)$$

" انتهى حل الدورة ^_^ "

اسئلة الدورة الأولى 2018

السؤال الأول :

أوجد المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية على منحني يتغير مع مرور الزمن.

السؤال الثاني :

يتحرك جسم كتلته m على مستو أفقي خشن ، بتأثير صدمة تحرك هذا الجسم بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 ، فإذا علمت أن الجسم يتعرض لمقاومة R ثابتة أثناء الحركة . فالمطلوب حساب الفترة الزمنية اللازمة حتى يتوقف هذا الجسم عن الحركة ثم عين المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة الزمنية .

السؤال الثالث :

لنفرض أنَّه لدينا نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة مرجعة من الشكل: $F = -x.c$ وتلاقي مقاومة من الوسط الذي تتحرك فيه من الشكل: $R = -\mu.x'$ ، حيث أنَّ μ ثابت

أوجد معادلة الحركة الاهتزازية للنقطة المادية.

السؤال الرابع :

يلقى جسم ثقيل نحو الاسفل في نهر بسرعة ابتدائية v_0 يصل هذا الجسم إلى قعر النهر بعد مرور T ثانية من الزمن، يتعرض هذا الجسم لمقاومة من الماء ، مسقطها على المحور الشاقولي للحركة x يساوي $R = -m.K.x'$ حيث K ثابت التناسب.

1) عين قانون حركة الجسم. **2)** احسب عمق النهر

انتهت الأسئلة ☺

السؤال الأول

أوجد المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية على منحني يتغير مع مرور الزمن .

الحل

لنفرض أن المنحني الذي تتحرك عليه نقطة مادية يتغير مع مرور الزمن، نفرض أن هذا المنحني معرف بتقاطع السطحين : $f_1(x,y,z,t)=0$ و $f_2(x,y,z,t)=0$

وبالتالي حسب قانون التحريك الأساسي : $m\,\vec{\Gamma}=\vec{F}$

بالإسقاط : $$m\frac{d2r}{dt^2}=F+N$$

ملاحظة : $\frac{d2r}{dt^2}$ هو المشتق الثاني للحركة بالنسبة للزمن ويمكن أن نرمز لها بالشكل $\frac{d^2r}{dt^2}$

وبما أن النقطة المادية تتحرك على المنحني، وهي مقيدة فلها ثقل ورد فعل

حيث : F هي القوَة المؤثرة على النقطة المادية و N هي رد فعل المنحني وهو متجه حسب الناظم وذلكَ بافتراض أن حركة النقطة المادية تتم بدون احتكاك، وبالتالي يكون((الارتباط مثالي))وأن رد الفعل N كرّد أي N_1,N_2 $N=N_1+N_2$

حيث: N_1 هو عبارة عن رد الفعل على المنحني بالنسبة للسطح الأول f_1

N_2 هو عبارة عن رد الفعل على المنحني بالنسبة للسطح الثاني f_2.

ملاحظة : نرى أن N_1,N_2 يقعان في المستوي الناظمي للمنحني حيث " المستوي الناظمي هو المستوي العمودي على المماس " وبالتالي فإن اتجاه النَاظم على السطح يتطابق مع شعاع تدرجه ، حسب هذا التطابق نستطيع أن نكتب :

$$N_1=\lambda_1\, grad\, f_1 \qquad , \qquad N_2=\lambda_2\, grad\, f_2$$

حيث: λ_1,λ_2 مضاريب ((مجاهيل)) يجب تعيينها ومنه يكون لدينا حسب قانون التحريك الاساسي لنقطة مادية مقيدة نجد :

$$m\frac{d2r}{dt^2}=F+\lambda_1 grad\, f_1+\lambda_2 grad\, f_2$$

وبالتالي إذا أخذنا القيم العددية يصبح $\lambda_1=\frac{N_1}{|grad\, f_1|}$, $\lambda_2=\frac{N_2}{|grad\, f_2|}$

حيث :

$$|grad\, f_1|=\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}=\Delta f_1$$

$$|grad\, f_2|=\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}=\Delta f_2$$

حيث: Δf_1 يدعى الوسيط التفاضلي لـ f_1 , Δf_2 يدعى الوسيط التفاضلي لـ f_2.

وبالتالي أصبح لدينا : $\lambda_1=\frac{N_1}{\Delta f_1}$, $\lambda_2=\frac{N_2}{\Delta f_2}$

و بالإسقاط نجد :
$$m\frac{d2x}{dt^2} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$
$$m\frac{d2y}{dt^2} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \dots \dots \dots (2)$$
$$m\frac{d2z}{dt^2} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \dots \dots \dots (3)$$

وهي المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية على منحني يتغير مع مرور الزمن.
نضيف لها معادلات الارتباط: $f_1(x,y,z,t) = 0 \dots (4) \quad , \quad f_2(x,y,z,t) = 0 \dots (5)$
أصبَحَ لدينا خمس توابع تابعة للزمن بخمس مجاهيل $((x,y,z,\lambda_1,\lambda_2))$

السؤال الثاني

يتحرك جسم كتلته m على مستو أفقي خشن ، بتأثير صدمة تحرك هذا الجسم بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 ، فإذا علمت أن الجسم يتعرض لمقاومة R ثابتة أثناء الحركة . فالمطلوب حساب الفترة الزمنية اللازمة حتى يتوقف هذا الجسم عن الحركة ثم عين المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة الزمنية .

الحل

ان حركة الجسم على المستوي الأفقي مستقيمة ولكن x محور الحركة يخضع الجسم لقوة ثقالة الجسم mg ولرد الفعل الناظمي N ، ولمقاومة R .

وحسب قانون نيوتن الثاني نجد : $m\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$

وبالإسقاط نجد : $-R = mx''$

من نص المسألة نعلم شروط البدء $((\, t = 0 \,, x_0 = 0 \,, x'_0 = v_0))$

بمكاملة العلاقة $(*)$ نجد : $mx' = -Rt + c_1$

وبتعويض شروط البدء في العلاقة السابقة نجد : $mx' = -Rt + mv_0 \dots . (1)$

وهذه الصيغة تعطينا الفترة الزمنية t اللازمة ولحسابها عندما يتوقف الجسم الحركة $((x' = 0))$ نجد :

$$t = \frac{m}{R} v_0$$

لإيجاد المسافة المقطوعة نكامل العلاقة (1) فنجد :

$$mx = -\frac{R}{2}t^2 + mv_0 t + c_2$$

ومن شروط البدء نجد أن $c_2 = 0$ وبالتالي $mx = -\frac{R}{2}t^2 + mv_0 t$

ومنه $x = -\frac{R}{2m}t^2 + v_0 t \dots\dots (2)$

للحصول على المسافة التي يقطعها الجسم (S) خلال الفترة الزمنية t نعوض الزمن في المعادلة (2) نجد :

$$S = -\frac{R}{2m}.\frac{m^2}{R^2}v_0^2 + \frac{m}{R}.v_0^2$$

$$S = -\frac{m}{2R}v_0^2 + \frac{m}{R}.v_0^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{m}{2R}v_0^2}$$

السؤال الثالث

لنفرض أنَّه لدينا نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المحور ox وتخضع لقوة مرجعة من الشكل: $F = -x.c$ وتلاقي مقاومة من الوسط الذي تتحرك فيه من الشكل: $R = -\mu.x'$ ، حيث أنَّ μ ثابت

أوجد معادلة الحركة الاهتزازية للنقطة المادية.

الحل

من قانون التحريك الأساسي $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط على ox.... $mx'' = -cx - \mu x'$

وبالتقسيم على m نحصل على...

$$x'' = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}x'$$

نفرض أنَ $\frac{\mu}{m} = 2b \quad , \quad \frac{c}{m} = k^2$

ومنه: $\boxed{x'' + 2bx' + k^2x = 0}$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة بدون طرف ثاني نحلها...

ويكون الحل العام لها من الشكل: $x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$

لنفرض أنَّ $x = e^{\lambda t}$ نشتق مرَتين ونعوض في المعادلة التفاضلية:

$$x' = \lambda e^{\lambda t} \quad , \quad x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\boxed{\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0}$$

وهي معادلة مميزة للمعادلة التفاضلية نحسب الجذور:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 4b^2 - 4(1)(k^2)$$

$$\Delta = 4b^2 - 4k^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{b^2 - k^2}$$

وبالتالي تكون الحلول: $\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2} \quad , \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}$

نميز عدة حالات

1) إذا كان $(b < k)$ في هذه الحالة نفرض أنَّ $k^2 - b^2 = k_1^2$

أي أنَّ : $k^2 - b^2 = -k_1^2 = i^2 k_1^2 \Longrightarrow \sqrt{k^2 - b^2} = \pm i k_1$

$$\lambda_1 = -b + ik_1 \quad , \quad \lambda_2 = -b - ik_2$$

ويكون الحل العام من الشكل: $\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$

$$x = c_1 e^{(-b+ik_1)t} + c_2 e^{(-b-ik_2)t}$$

$$x = e^{-bt}\left(c_1 e^{ik_1 t} + c_2 e^{-ik_1 t}\right) \ldots\ldots (1)$$

نعلم أن $\boxed{e^{ik_1 t} = cos(k_1 t) + i\, sin(k_1 t) \,, e^{-ik_1 t} = cos(k_1 t) - i\, sin(k_1 t)}$

بالتعويض بالمعادلة (1) نجد:

$$x = e^{-bt}[\, c_1\, (\, cos(k_1 t) + i\, sin(k_1 t)\ ) + c_2(\ cos(k_1 t) - i\, sin(k_1 t)\,)\,]$$

$$x = e^{-bt}[(c_1 + c_2)\, cos(k_1 t) + i(c_1 - c_2)\, sin(k_1 t)]$$

نفرض أن: $A = c_1 + c_2 \quad , \quad B = i(c_1 - c_2)$

نعوض فنجد : $\boxed{x = e^{-bt}[A\, cos(k_1 t) + B\, sin(k_1 t)]}$

حيث $A\,, B$ ثوابت التكامل.

ملاحظة: نسمي k نبض الحركة الاهتزازية أما b فهي تقيس لنا شدة مقاومة الوسط وبما أن e^{-bt} يتناقص مع ازدياد الزمن فالحركة في هذه الحالة حركة اهتزازية متخامدة مع مرور الزمن .

2) إذا كان $(b > k)$

$$\sqrt{b^2-k^2}=n \Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-b+n\\ \lambda_2=-b-n\end{cases}$$

وبالتالي يكون الحل العام على الشكل التالي :

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$

$$x=c_1e^{-b+nt}+c_2e^{-b-nt} \Longrightarrow x=e^{-bt}(c_1e^{nt}+c_2e^{-nt})$$

نعلم أن:

$$\boxed{e^{nt}=ch(nt)+sh(nt) \quad , \quad e^{-nt}=ch(nt)-sh(nt)}$$

نعوض فنجد:

$$x=e^{-bt}\left[c_1\big(ch(nt)+sh(nt)\big)+c_2\big(ch(nt)-sh(nt)\big)\right]$$

$$x=e^{-bt}[(c_1+c_2).ch(nt)+(c_1-c_2).sh(nt)]$$

نفرض: $A=(c_1+c_2) \quad , \quad B=(c_1-c_2)i$

$$\boxed{x=e^{-bt}\big(A.ch(nt)+B.sh(nt)\big)}$$

حيث $A\,,B$ ثوابت التكامل.
و هذا يبين أنَّ الحركة تتخامد في الوسط المقاوم $((R))$ مع مرور الزمن.

3) إذا كان $(k=b)$

في هذه الحالة $\lambda_1=\lambda_2=-b$ أي جذر مكرر، وبالتالي يكون الحل العام من الشكل:

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2te^{\lambda_1 t} \Longrightarrow x=c_1e^{-bt}+c_2te^{-bt}$$

$$\boxed{x=e^{-bt}(c_1+tc_2)}$$

نلاحظ أن الحد $((e^{-bt}))$ يتناقص بسرعة أشد من تزايد الزمن، فإن شكل الحركة في هذه الحالة يكون شبيه بالحالة السابقة، ومنه فإن <u>الحركة متخامدة</u>

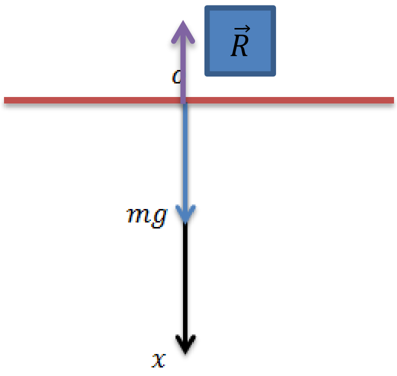
السؤال الرابع

يلقى جسم ثقيل نحو الاسفل في نهر بسرعة ابتدائية v_0 يصل هذا الجسم إلى قعر النهر بعد مرور T ثانية من الزمن، يتعرض هذا الجسم لمقاومة من الماء ، مسقطها على المحور الشاقولي للحركة x يساوي $R=$ $-m.K.x'$ حيث K ثابت التناسب.

عين قانون حركة الجسم. **2)** احسب عمق النهر .

الحل

1) حسب قانون التحريك الاساسي $\sum \vec{F} = m\vec{\Gamma}$



بالإسقاط على المحور الشاقولي نجد: $m.x'' = mg - mk.x'$

$$x'' = g - kx' \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = g - kx'$$

بفصل المتحولات نجد: $\frac{dx'}{g-kx'} = dt$

نكامل الطرفين فنجد : $-\frac{1}{k}\ln(g - kx') = t + c_1 \ldots\ldots\ldots (*)$

من شروط البدء في اللحظة t ((من نص المسألة)) نجد $t = 0 \ , x_0 = 0 \ , \ x'_0 = v_0$

نعوض شروط البدء ب $(*)$ لإيجاد الثابت c_1 نجد :

$$\boxed{c_1 = -\frac{1}{k}\ln(g - kv_0)}$$

فتصبح العلاقة $(*)$ بعد تعويض c_1 ..

$$-\frac{1}{k}\ln(g - kx') = t - \frac{1}{k}\ln(g - kv_0)$$

نضرب الطرفين بـــ (k) فنجد : $-\ln(g - kx') = kt - \ln(g - kv_0)$

$$\ln\left(\frac{g-kv_0}{g-kx'}\right) = kt \Rightarrow \frac{g-kv_0}{g-kx'} = e^{kt}$$

نعزل x' فنجد : $(g - kv_0)e^{-kt} = g - kx'$

$$x' = \frac{ge^{-kt} - kv_0e^{-kt} - g}{-k} \Rightarrow x' = \frac{g}{k} - \frac{g-kv_0}{k}\ e^{-kt}$$

بالمكاملة للعلاقة الأخيرة نجد : $x = \frac{g}{k}t + \frac{g-kv_0}{k^2}\ e^{-kt} + c_2 \ldots\ldots (**)$

لإيجاد c_2 من شروط البدء $(x = 0 \ , t = 0)$ بتعويض ب $(**)$ نجد...

$$\boxed{c_2 = -\frac{g - kv_0}{k^2}}$$

2) لحساب العمق نعوض كل x ب h وكل t ب T بالعلاقة $(**)$ مع تعويض c_2 فتصبح

$$h = \frac{g}{k}T + \frac{g - kv_0}{k^2}\, e^{-kT} - \frac{g - kv_0}{k^2}$$

" انتهى حل الدورة ^_^ "

إعداد: محمد علي فليون