المثال :

تمهيدية : لتكن $\mathcal{L}$ فئة لأجل $X\in ob(\mathcal{L})$ يوجد دالي غير مباشر.

$$\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow set's$$

البرهان :

لنعرف $\hat{h}_X : \mathcal{L} \longrightarrow set's$ من خلال 1- تطبيق الأشياء

$$\hat{h}_X : ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(set's)$$

$$\forall Y \in ob(\mathcal{L}) \ , \ \hat{h}_X(Y) = \mathcal{L}(Y, X)$$

1- واضح كونه تطبيق أشياء.

2- تطبيق مورفزمات

$$\hat{h}_X : Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(set's)$$

$$\forall u : A \longrightarrow B \in \mathcal{L}(A, B)$$

$$\hat{h}_X(u) : \hat{h}_X(B) \longrightarrow \hat{h}_X(A)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f.u"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$: \mathcal{L}(B, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(B, X) \quad \hat{h}_X(u)(f) = f.u$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L})$$

$$\hat{h}_X(I_A) : \mathcal{L}(A, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(A ; X) ; \ \hat{h}_X(I_A)(f) = f.I_A = f$$

$$\hat{h}_X(I_A) = I_{\mathcal{L}(A,X)} = I_{\hat{h}_X(A)}$$

$$\forall u, v \in Mor(\mathcal{L}) ; \quad u : A \longrightarrow B \ , \ v : B \longrightarrow D ;$$

$$v.u : A \longrightarrow D$$

$\hat{h}_X(u)(f) = f.u$

$$\hat{h}_X(v.u) : \mathcal{L}(D, X) \longrightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$\forall g \in \mathcal{L}(D, X)$$

$$\hat{h}_X(v.u)(g) \overset{\text{تجميعي}}{=} g.(v.u) = (g.v).u$$

$$\hat{h}_X(v.u)(g) = (g.v).u = \hat{h}_X(u)(\underline{g.v}) \quad \circledast$$

$$v : B \longrightarrow D$$

$$\hat{h}_X(v) : \mathcal{L}(D, X) \longrightarrow \mathcal{L}(B, X)$$

$$\boxed{\hat{h}_X(v)(g) = g.v}$$

نعوض بـ $\circledast$

$$\hat{h}_X(v.u)(g) = \hat{h}_X(u)\left(\hat{h}_X(v)(g)\right)$$

$$= \left(\hat{h}_X(u).\hat{h}_X(v)\right)(g)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{h}_X(v.u) = \hat{h}_X(u).\hat{h}_X(v)}$$

ومنه فإن $\hat{h}_X$ دالي غير مباشر

تمهيدية: ليكن $F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دالي مباشر

إذا كان u ايزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ عندئذٍ $F(u)$ ايزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$

البرهان:

لنفرض أن u ايزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ $u : A \longrightarrow B$

عندئذٍ يوجد مورفيزم $v : B \longrightarrow A$ حيث

$$v.u = I_A \qquad u.v = I_B$$

فضلاً عن ذلك

A,B

$$F(u): F(A) \longrightarrow F(B)$$
$$F(v): F(B) \longrightarrow F(A)$$

مورفيزمات للفئة $\mathcal{L}_2$

$$F(u)\cdot F(v) = F(u\cdot v) = F(I_B) = I_{F(B)}$$

طالحادالي مباشر

$$F(v)\cdot F(u) = F(v\cdot u) = F(I_A) = \cancel{F}\, I_{F(A)}$$

طالحادالي مباشر

وهذا يبين أن $F(u)$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$.

تمهيدية: لأجل أي فئة $\mathcal{L}$ يوجد دالي مطابق والذي نرمز له بـ $I_{\mathcal{L}}$

البرهان: لنعرف $I_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$

من خلال: 1- تطبيق أجسام

$$I_{\mathcal{L}}: ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(\mathcal{L})$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}) \quad , \quad I_{\mathcal{L}}(A) = A$$ واضح أنه تطبيق

2- تطبيق المورفيزمات

$$I_{\mathcal{L}}: Mor(\mathcal{L}) \longrightarrow Mor(\mathcal{L})$$

حيث أي كان

$u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ فإن

$$I_{\mathcal{L}(u)}: I_{\mathcal{L}}(A) \longrightarrow I_{\mathcal{L}}(B)$$

$$I_{\mathcal{L}(u)}: A \longrightarrow B$$

موصفات:

$$I_{\mathcal{L}}(I_A) = I_{\mathcal{L}(A)} = I_A \quad , \quad I_{\mathcal{L}}(u\cdot v) = u\cdot v = I_{\mathcal{L}}(u)\cdot I_{\mathcal{L}}(v)$$

#

وظيفة دالي نرمز C

/ /

تمهيد: لتكن $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ فئتين ولنفرض أن $B \in ob(\mathcal{L}_2)$ عنصر ثابت نعرف دالي ثابت:

$$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \quad F(A) = B$$

لنثبت $F : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ مصاحب

1) تطبيق الأشياء (الكائنات) {التطبيق الثابت}

$$F : ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \; , \; F(A) = B$$

التطبيق الثابت

$F(D) = B$

2) تطبيق مورفيزمات

$$F : Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

$$\forall u : A \longrightarrow D \in \mathcal{L}_1(A, D)$$

$$F(u) : F(A) \longrightarrow F(D)$$

$$F(u) : B \longrightarrow B = I_B$$

(مورفيزم واحد ووحيد)

1) $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1) \; ; \; F(I_A) = I_B = I_{F(A)}$

2) $\forall u, v \in Mor(\mathcal{L}_1)$ $\quad u : A \longrightarrow D$

$$v : D \longrightarrow K$$

$$v.u : A \longrightarrow K$$

$$F(v.u) : \underset{B}{F(A)} \longrightarrow \underset{B}{F(K)}$$

$$F(v.u) = I_B = I_B \, I_B = F(v) . F(u)$$

#

تعريف: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات،

$$F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

$$G : \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$$

دوال التركيب: $G.F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_3$

~~بالشكل $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$~~

/ /

A

نعرف $G.F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_3$ بالشكل.

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1);\quad G.F(A) = G(F(A))$$

هل تركيب الداليين دالي؟!

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات ولنفرض أن

$$F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

$$G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_3$$

دوال مباشرة (أو دوال غير مباشرة)

عندئذٍ $G.F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_3$ هو دالي مباشر

البرهان: نعرف $G.F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_3$ من خلال.

1- تطبيق الاشياء لدينا:

تطبيق $F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_2)$

تطبيق $G: ob(\mathcal{L}_2) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$

نضع

$$G.F: ob(\mathcal{L}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{L}_3)$$

التركيب للتطبيقين F و G؛ المعرف بالشكل

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_2);$$

$$G.F(A) = G(F(A))$$

② تطبيق المورفيزمات.

لدينا تطبيق

$$F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_2)$$

ولدينا تطبيق

$$G: Mor(\mathcal{L}_2) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$$

نضع $G.F: Mor(\mathcal{L}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{L}_3)$

التركيب للتطبيقين F و G المعرف بالشكل

فإن $\forall u \in Mor(\mathcal{L}_1)$:

$$G.F(u) = G(F(u)) \quad , \forall A \in ob(\mathcal{L}_1);$$

$$G.F(I_A) = G(F(I_A)) = G(I_{F(A)}) = I_{G(F(A))}$$

$$= I_{G.F(A)}$$

/ /

$\forall u, v \in Mor(\mathcal{C}_1)$, $G.F(u.v) = G.(F(u.v))$

$= G(F(u).F(v)) = G(F(v))$

$= \cancel{G} \; G.F(u).G.F(v)$

بالتوفيق، الأولى