11-4-2018

نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة السادسة عنوان المحاضرة : حركة نقطة مادية مقيدة

بسم الله وبالله المستعان . . .لنبدأ زملائي في محاضرتنا التي سنتناول بها تتمة حركة نقطة في حقل الثقالة الأرضية .

حركة نقطة مادية في حقل الثقالة الأرضية بوجود " وسط مقاوم "

لتكن M نقطة ماديّة، كتلتها m ، تتحرك في وسط مقاوم، ولتأخذ هذه المقاومة متناسبة مع السّرعة، ومن الشكل: $\vec{R} = -mk\vec{v}$ حيث k ثابت موجب يتعلق بطبيعة الوسط ، حيث k ثابت يتعلق بطبيعة الوسط الذي تتحرك في النقطة المادية **المطلوب** : أوجد معادلات الحركة.

الحل

حسب قانون التّحريك الأساسي لدينا:
$$m\vec{\Gamma} = \sum \vec{F}$$

$$mx'' = -mkx' \quad , \quad my'' = 0 \quad , \quad mz'' = -mg - mkz'$$

نقسّم على m :
$$x'' = -kx' \ldots\ldots\ldots (1) \quad , \quad z'' = -g - kz' \ldots\ldots\ldots (2)$$

وهي المعادلات التفاضليّة للحركة ، نحلّها :

<u>لنأخذ المعادلة (1):</u>
$$x'' = -kx' \Longrightarrow \frac{dx'}{dt} = -kx'$$

وهي معادلة تفاضليّة قابلة لفصل المتحوِّلات:
$$\frac{dx'}{x'} = -k\,dt \Longrightarrow ln|x'| = -kt + c_1$$

نعين c_1 من شروط البدء...
$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha \,, y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ومنه:
$$c_1 = ln(v_0 \cos\alpha)$$

نعوِّض بالمعادلة فنجد:
$$ln|\,x'| = -kt + ln(v_0 \cos\alpha)$$

$$\ln\left|\frac{x'}{v_0\cos\alpha}\right| = -kt \Rightarrow \frac{x'}{v_0\cos\alpha} = e^{-kt}$$

$$x' = v_0\, e^{-kt}\cos\alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-kt}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow dx = (v_0\, e^{-kt}\cos\alpha).dt$$

بالمكاملة نجد : $x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt}\cos\alpha + c_2$

نعين c_2 من شروط البدء نحتاج الشروط: $x = 0\ ,\ t = 0$ ونعوض ...

$$0 = -\frac{v_0}{k} e^0\cos\alpha + c_2 \Rightarrow 0 = -\frac{v_0}{k}\cos\alpha + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{k}\cos\alpha$$

بالتعويض نجد:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt}\cos\alpha + \frac{v_0}{k}\cos\alpha \Rightarrow \boxed{x = \frac{v_0}{k}\cos\alpha\,(1 - e^{-kt})}$$

وهي المعادلة التي تمثل حركة نقطة مادية على المحور ox

لنأخذ المعادلة (2): $z'' = -g - kz' \Rightarrow \frac{dz'}{dt} = -(g + kz')$

وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات: $\frac{dz'}{g+kz'} = -dt$

بضرب الطرفين بـ k ثم المكاملة :

$$\ln|g + kz'| = -kt + c_3$$

نعين c_3 من شروط البدء :

$$t = 0\begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0\cos\alpha\,, y' = 0, z' = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

بذلك نجد أن: $c_3 = \ln|g + kv_0\sin\alpha|$

ومنه بالتعويض: $\ln|g + kz'| = -kt + \ln|g + kv_0\sin\alpha|$

وبالتالي:

$$\ln\left|\frac{g+kz'}{g+kv_0\sin\alpha}\right| = -kt \Rightarrow \frac{g+kz'}{g+kv_0\sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$kz' = (g + kv_0\sin\alpha)\, e^{-kt} - g \Leftarrow g + kz' = (g + kv_0\sin\alpha)\, e^{-kt}$$

نقسم الطرفين على k فنحصل على:

$z' = \frac{(g+kv_0 \sin\alpha)}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}$ وهي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k} \Leftarrow dz = \left(\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt}\right) dt - \frac{g}{k} dt$$

بالمكاملة نجد :

$$z = -\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + c_4$$

نعين c_4 من شروط البدء:

$$t = 0 \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = v_0 \cos\alpha \,, y' = 0, z' = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

فنجد أن : $c_4 = \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2}$

وبالتالي :

$$z = -\frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{g+kv_0 \sin\alpha}{k^2}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{k^2}(g + kv_0 \sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t}$$

وهي المعادلة الثانيّة تمثل حركة النقطة المادية على المحور oz.

الحركة المقيدة للنقطة المادية

مقدمة : عند دراسة حركة النقطة المادية سوف ننطلق من بديهية الارتباط التي تنص على أنه يمكن **معالجة** حركة النقطة المادية كنقطة طليقة **بشرط** استبدال الارتباطات المفروضة على هذه النقطة بردود أفعالها تماماً كما هو في ابحاث التوازن وعلى هذا الاساس ينحسب الفرق الاساسي بين دراسة حركة نقطة مقيدة ودراسة حركة نقطة طليقة بلزوم إضافة ردود الأفعال كقوى مؤثرة على النقطة المقيدة بالإضافة إلى القوى الخارجية المطبقة على هذه النقطة وهكذا نرى أن الوظيفة الاساسية لتحريك النقطة المادية المقيدة هو تحديد قانون الحركة لهذه النقطة بالإضافة لإيجاد ردود الأفعا .

المعادلات التفاضلية لحركةِ نقطةٍ مادية على منحني في الإحداثيّات الديكارتية

لنفرض أن المنحني الذي تتحرك عليه نقطة مادية يتغير مع مرور الزمن، نفرض أن هذا المنحني معرف بتقاطع السطحين : $f_2(x, y, z, t) = 0$ و $f_1(x, y, z, t) = 0$

وبالتالي حسب قانون التحريك الأساسي : $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$

بالإسقاط : $m\frac{d2r}{dt^2} = F + N$

ملاحظة : $\frac{d2r}{dt^2}$ هو المشتق الثاني للحركة بالنسبة للزمن ويمكن أن نرمز لها بالشكل $\frac{d^2r}{dt^2}$

وبما أن النقطة المادية تتحرك على المنحني، وهي مقيدة فلها ثقل ورد فعل
حيث : F هي القوَة المؤثرة على النقطة المادية و N هي رد فعل المنحني وهو متجه حسب الناظم
وذلكَ بافتراض أن حركة النقطة المادية تتم بدون احتكاك، وبالتالي يكون((الارتباط مثالي))وأن رد الفعل N كرًد N_1, N_2 أي $N = N_1 + N_2$
حيث: N_1 هو عبارة عن رد الفعل على المنحني بالنسبة للسطح الأول f_1
N_2 هو عبارة عن رد الفعل على المنحني بالنسبة للسطح الثاني f_2.

ملاحظة : نرى أن N_1, N_2 يقعان في المستوي الناظمي للمنحني حيث " المستوي الناظمي هو المستوي العمودي على المماس " وبالتالي فإن اتجاه النَاظم على السطح يتطابق مع شعاع تدرجه ، حسب هذا التطابق نستطيع أن نكتب :

$$N_1 = \lambda_1\, grad\, f_1 \qquad , \qquad N_2 = \lambda_2\, grad\, f_2$$

حيث: λ_1, λ_2 مضاريب ((مجاهيل)) يجب تعيينها ومنه يكون لدينا
حسب قانون التحريك الاساسي لنقطة مادية مقيدة نجد :

$$m\frac{d2r}{dt^2} = F + \lambda_1 grad\, f_1 + \lambda_2 grad\, f_2$$

وبالتالي إذا أخذنا القيم العددية يصبح $\lambda_1 = \dfrac{N_1}{|grad\, f_1|} \quad , \quad \lambda_2 = \dfrac{N_2}{|grad\, f_2|}$

حيث :

$$|grad\, f_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_1$$

$$|grad\, f_2| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_2$$

حيث: Δf_1 يدعى الوسيط التفاضلي لـ f_1 , Δf_2 يدعى الوسيط التفاضلي لـ f_2.

وبالتالي أصبح لدينا : $\lambda_1 = \dfrac{N_1}{\Delta f_1} \quad , \quad \lambda_2 = \dfrac{N_2}{\Delta f_2}$

و بالإسقاط نجد :

$$m\frac{d2x}{dt^2} = F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$m\frac{d2y}{dt^2} = F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$m\frac{d2z}{dt^2} = F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} \ldots\ldots\ldots (3)$$

وهي المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية على منحني يتغير مع مرور الزمن.
نضيف لها معادلات الارتباط: $f_1(x,y,z,t) = 0 \ldots (4) \quad , \quad f_2(x,y,z,t) = 0 \ldots (5)$
أصبَحَ لدينا خمس توابع تابعة للزمن بخمس مجاهيل $((x,y,z,\lambda_1,\lambda_2))$

مثال

تخضع M نقطة مادية كتلتها m تخضع لقوة $\vec{F}$ معينة بالشكل : $\vec{F} = ma\vec{T} + m\rho k^2\vec{N}$
أوجد معادلة الحركة ، حيث $\vec{T}$ شعاع المسار، $\vec{N}$ شعاع الناظم ، ρ نصف قطر التقوس .

الحل

هنا تكون القوة على الإحداثيات الذاتية ، وانطلاقاً من قانون التحريك الاساسي $m\,\vec{\Gamma} = \vec{F}$ نجد :

بالإسقاط على $\vec{T}$ نجد

$$m\frac{dv}{dt} = ma \dots\dots (1)$$

بالإسقاط على $\vec{N}$ نجد

$$m\frac{v^2}{\rho} = m\rho k^2 \dots\dots (2)$$

من المعادلة (1) نجد $\frac{dv}{dt} = a \Longrightarrow dv = adt \Longrightarrow v = at + c_1$

ومن شروط البدء تكون $(c_1 = 0)$ $\Longleftarrow v = at \Longleftarrow \frac{ds}{dt} = at \Longleftarrow s = \frac{at^2}{2} \dots (*)$

من المعادلة (2) نجد $\frac{v^2}{\rho} = \rho k^2 \Longrightarrow v^2 = \rho^2k^2 \Longrightarrow v = \mp\rho k$

$$\Longrightarrow \boxed{v = \rho k}$$

نعلم أن : $\theta = kt + c_2 \Longleftarrow d\theta = kdt \Longleftarrow \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}.k$

ومن شروط البدء تكون $(c_2 = 0)$ $\Longleftarrow \theta = kt \Longleftarrow t = \frac{\theta}{k}$

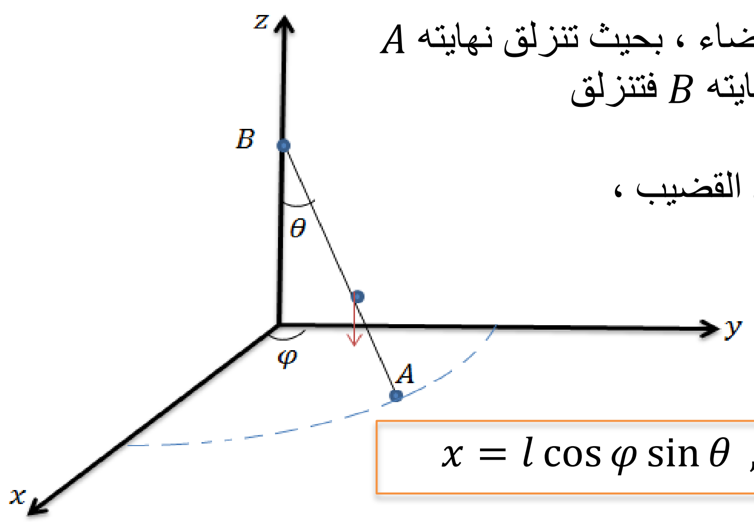
نعوض الزمن t بالمعادلة $(*)$ فنجد :

وهي معادلة المسار الحلزوني

$$\boxed{s = \frac{a}{2k^2}\theta^2}$$

مثال

AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء ، بحيث تنزلق نهايته A
بدون احتكاك على المستوي الافقي oxy ، اما نهايته B فتنزلق
بدون احتكاك على المحور الشاقولي oz ،
M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب ،
اكتب معادلة الطاقة الحركية للنقطة M .



الحل :

نأخذ جملة الإحداثيات الكروية

$$x = l\cos\varphi\sin\theta \;, y = l\sin\varphi\sin\theta \;, z = l\cos\theta \;\dots.(\$)$$

نشتق المعادلات ($) فنجد :

$$x' = l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$y' = l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$z' = -l\sin\theta\,.\,\theta'$$

ونعلم أن معادلة الطاقة الحركية هي $T = \frac{1}{2}mv^2$

$$\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$
$$oM = l\cos\varphi\sin\theta + l\sin\varphi\sin\theta + l\cos\theta$$
$$\Rightarrow v = (oM)' = l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi'$$
$$+ l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi' - l\sin\theta\,.\,\theta'$$

$$\Rightarrow v^2 = (l\cos\varphi\cos\theta\,.\,\theta' - l\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2$$
$$+ (l\ \sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta' + l\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi')^2 + (-l\sin\theta\,.\,\theta')^2$$

بفك التربيع نجد :

$$\Rightarrow v^2 = l^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 - 2l^2.\cos\varphi\sin\theta\,.\,\theta'.\sin\varphi\cos\theta\,.\,\varphi'$$
$$+l^2\ \sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + l^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2$$
$$+2l^2.\sin\varphi\cos\theta\,.\,\theta'.\cos\varphi\sin\theta\,.\,\varphi' + l^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$

بالإصلاح و المطابقة نجد :

$$\Rightarrow v^2 = l^2[\cos^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\,.\,\theta'^2]$$
$$+l^2[\sin^2\varphi\, sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 + \cos^2\varphi\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$
$$\Rightarrow v^2 = l^2.\theta'^2[\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)]$$
$$+l^2.\varphi'^2[sin^2\theta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)] + l^2\sin^2\theta\,.\,\theta'^2$$
$$\Rightarrow v^2 = l^2.\theta'^2(\cos^2\theta + sin^2\theta) + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow v^2 = l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta$$

نعوض في قانون الطاقة الحركية فنجد :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(l^2.\theta'^2 + l^2.\varphi'^2.\sin^2\theta\right)}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** راما جوهر **عبير خزنة كاتبي