◄ دكتور المادة: جبران جبران

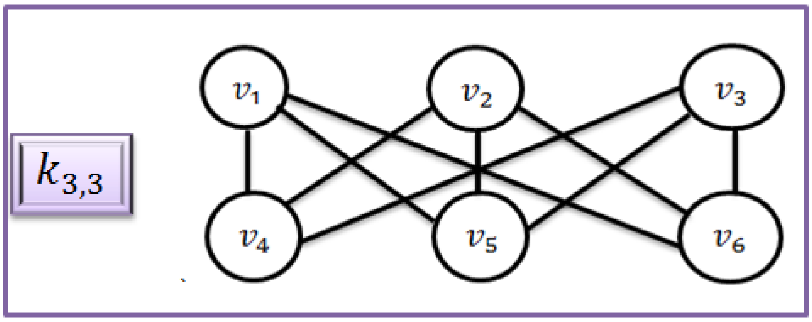
◄ المحاضرة: الخامسة عنوان المحاضرة: الشجرة والغابة

بسم الله وبالله المستعان ....سنكمل معاً زملائي في هذه المحاضرة البيان الجزوء والعمليات على البيان وتمثيله على شكل مصفوفة إضافة إلى تعريف الاشجار والغابة

تعريف البيان ثنائي التجزئة : نعرف البيان التام ثنائي التجزئة بأنه بيان التجزئة و V_1,V_2 مجموعتي تجزئة بحيث كل رأس من المجموعة V_1 يتصل بجميع رؤوس المجموعة V_2 وبفرض أن :

$|V_1| = n \quad , |V_2| = m$ وسنرمز لهذا البيان بالرمز $k_{n,m}$

مثال : ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V, E)$ المعطى بالشكل التالي :



إن البيان $k_{3,3}$ بيان تام ثنائي التجزئة لأن كل رأس من المجموعة V_1 يتصل بجميع رؤوس المجموعة V_2

إن V_1 مجموعة تجزئة تحوي على ثلاث عقد $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$

وإن V_2 مجموعة تجزئة تحوي على ثلاث عقد $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$

البيان الجزوء إلى n جزء

نقول عن البيان G أنه جزوء إلى n جزء إذا أمكن تجزئة V إلى n مجموعة غير خالية $V_1, V_2, \dots \dots V_n$ بحيث يتحقق الشرطين :

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad , V = \cup_{i=1}^{n} V_i \quad ; \forall\, i \neq j$$

$\forall\, uv \in E(G)\, ;\ \exists i,j\ ; i \neq j$ بحيث $u \in V_i \ , v \in V_j$

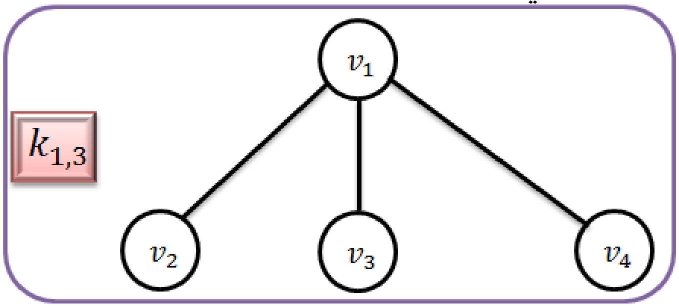
أي لا توجد أضلاع تقع في المجموعة الواحدة " V_i لا تحوي على أضلاع بين رؤوسها "

تعريف : نقول عن البيان G أنه جزوء إلى n جزء تام إذا كان V جزوء إلى n جزء $V_1, V_2, \dots \dots V_n$ وكل عنصر من V_i يتصل مع كل عناصر المجموعة V_j بحيث إذا كانت

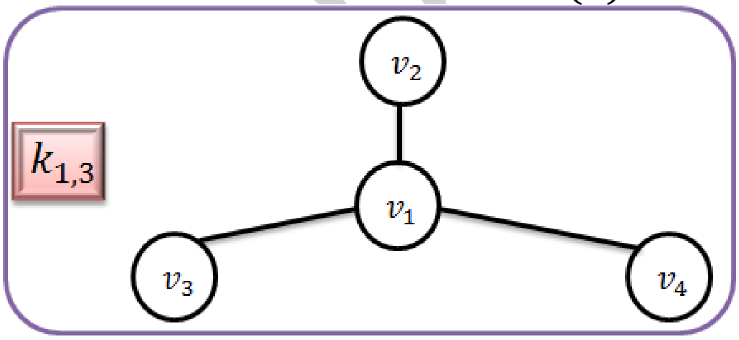
$;i = 1,2, \dots \dots n \quad \forall\, i \neq j :\ |V_i| = m_i$ وسنرمز لهذا البيان بـ $k_{m_1,m_2,\dots\dots m_n}$

أمثلة

مثال (1) ليكن لدينا البيان التالي :



بيان ثنائي التجزئة " جزوء إلى مجموعتين "
المجموعة الأولى V_1 مكونة من عقدة واحدة $V_1 = \{v_1\}$
المجموعة الثانية V_2 مكونة من ثلاث عقد $V_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$
ويمكن تمثيل البيان بالمثال (1) بالشكل :



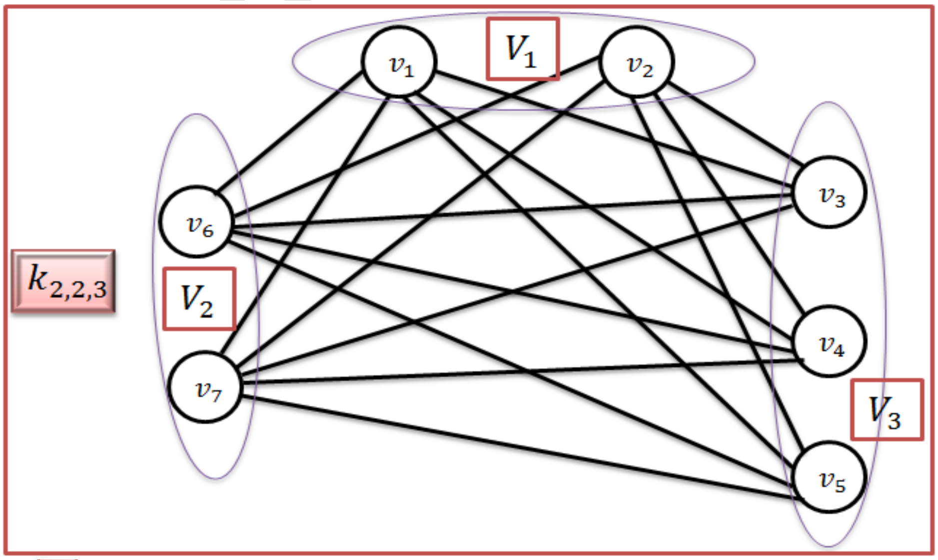
تعميم : يقال عن مثل هذه البيانات التي قدرة أحد مجموعاتها (1) والمجموعة الباقية قدرتها (n) " البيان النجمة "

مثال (2) ليكن لدينا البيان التالي :

البيان $k_{2,2,3}$ بيان جزوء إلى ثلاث مجموعات تجزئة $\{V_1, V_2, V_3\}$

بحيث كل رأس من المجموعة الأولى يتصل بجميع الرؤوس للمجموعة الثانية والثالثة

وكذلك الأمر بالنسبة للمجموعة الثانية والثالثة .



علماً أن V_1 مجموعة مكونة من عقدتين $V_1 = \{v_1, v_2\}$
و V_2 مجموعة مكونة من عقدتين $V_2 = \{v_6, v_7\}$
و V_3 مجموعة مكونة من ثلاث عقد $V_3 = \{v_3, v_4, v_5\}$

ملاحظة : لا يوجد اتصال بين رؤوس المجموعة ذاتها .

تعريف : نقول عن البيانيين G_1, G_2 أنهما إيزومورفيزمان إذا وجد تابع تقابل Ψ يحقق

$$\Psi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$$

ويحافظ على الخواص .

$$uv \in E(G_1) \Longrightarrow \Psi(u).\Psi(v) \in E(G_2)$$

ونرمز لهذا بالرمز بـ $G_1 \cong G_2$ " G_1 إيزومورفيزمي مع G_2 "

العمليات على البيان

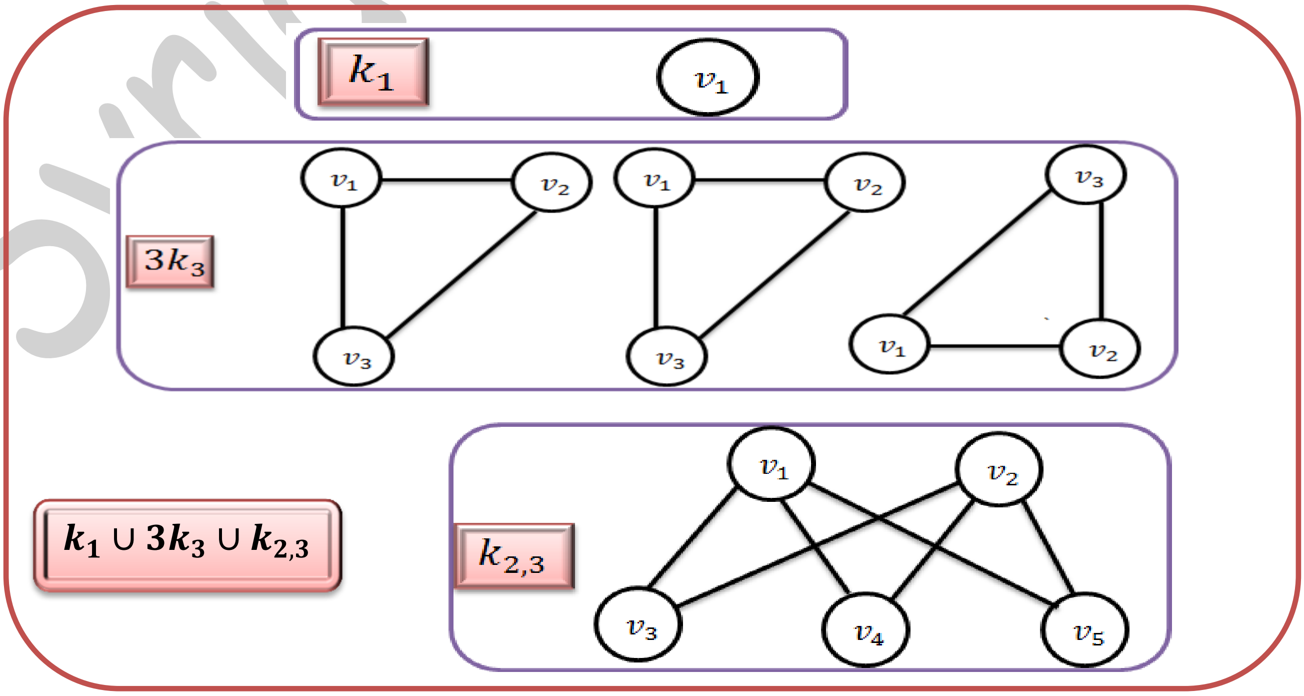
اجتماع بيانين : ليكن G_1, G_2 بيانين منفصلن نعرف اجتماع بيانين إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \quad , \quad E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$$

ونرمز له بالرمز $G_1 \cup G_2$ ، إذا كان $G_1 \cong G_2 \cong G$ فإن $G_1 \cup G_2 \cong 2G$
إذاً إن البيانين إيزومورفيزمان مع بعضهما نستطيع كتابتهم $2G$

تعميم : إذا كان $G_1 \cong G_2 \dots \dots \cong G_n$ تكتب nG

مثال



Syria Math Team

k_1 بيان مكون من مجموعة واحدة وعقدة واحدة .

$3K_3$بيان تام مكون من مجموعة واحدة ويحوي ثلاث عقد ومكرر ثلاث مرات

$K_{2,3}$ بيان مكون من مجموعتين$V_1 = \{v_1, v_2\}, V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ لا يوجد ضلع بين المجموعة

جمع بيانين : ليكن لدينا G_1 , G_2 بيانين منفصلين نرمز لجمعهما بـ $G_1 + G_2$ بحيث :

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

و $E(G_1 + G_2)$ تمثل مجموعة أضلاع G_1 , G_2 مضافاً إليها مجموعة الأضلاع التي تصل V_1 بـ V_2

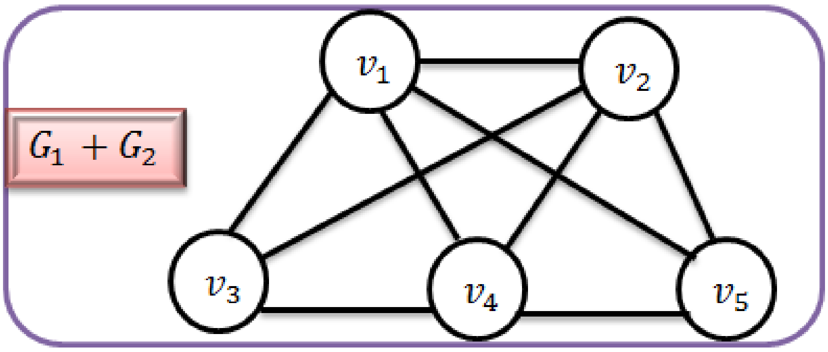
مثال ليكن لدينا البيانين التاليين :

المطلوب : أوجد $G_1 + G_2$ بالرسم .

الحل

إن G_1 مسار طوله (2) زوجي ، و G_2 مسار طوله (1) فردي .

فإن الشكل يكون كالآتي :

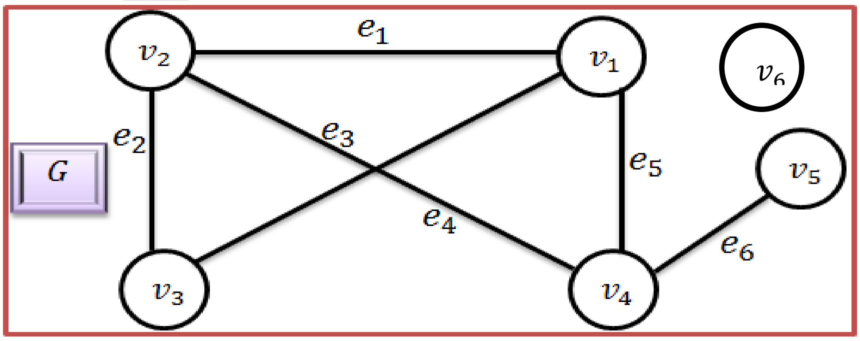


تمثيل البيان على شكل مصفوفات

مصفوفة التأثير : هي مصفوفة اسطرها تمثل الروس وأعمدتها تمثل الاضلاع تحسب عناصرها كما يلي

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } v_i \text{ طرفاً للضلع } e_j \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$ ((أي هي علاقة رأس بضلع))

مثال ليكن لدينا البيان الممثل بالشكل :



أوجد مصفوفة التأثير للبيان السابق

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
v_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
v_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

نقول عن المصفوفة السابقة بأنها مصفوفة التأثير للبيان G

نستنتج : إن الأضلاع التي يتصل بها رأس نعطيها القيمة (1) أما الأضلاع التي لا تتصل بأي رأس نعطيها القيمة (0) .
إذا كانت قيم السطر جميعها تساوي الصفر فإن الرأس منعزل مثل الرأس v_6 رأس منعزل
إذا كانت قيم السطر جميعها تساوي الواحد فإن الرأس طرفي .

مصفوفة الارتباط : هي مصفوفة اسطرها واعمدتها تمثل الرؤوس
تمثل عناصرها بالشكل :

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}
$$

((أي هي علاقة رأس برأس))

ملاحظة : إن عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة الارتباط أصفار
أي $a_{ii} = 0 \;\; ; i = 1, \dots \dots n$
لأن لدينا البيانات بسيطة أي لا يوجد عرى ولا أضلاع مضاعفة .

وبالتالي مصفوفة الارتباط هي مصفوفة متناظرة لأنه إذا كانت v_i تتصل مع v_j فإن v_j تتصل مع v_i

مثال : ليكن لدينا البيان البسيط G المعطى في المثال السابق
فإن تمثيل مصفوفة الارتباط يكون من الشكل :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\
v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

وبالتالي المصفوفة متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي

Syria Math Team

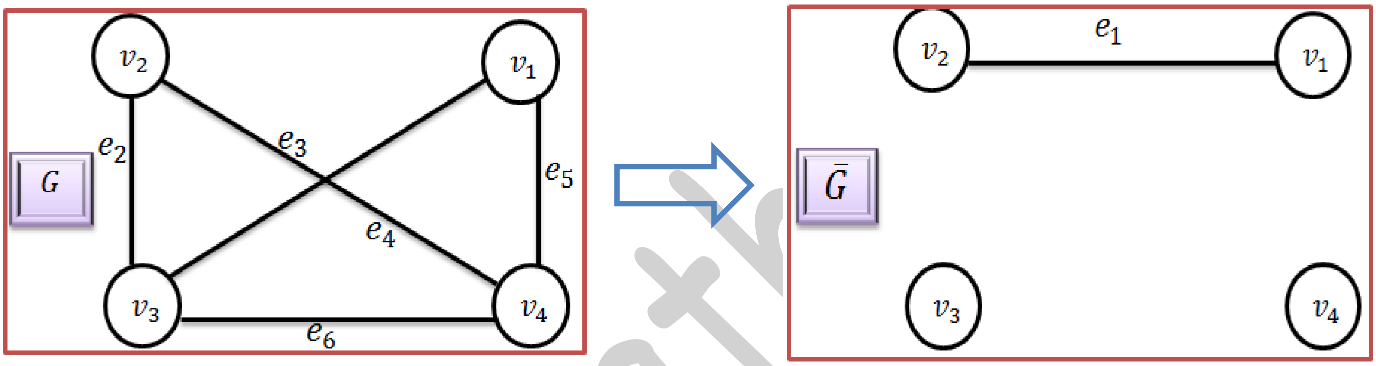
ملاحظة : إن مجموع عناصر السطر الأول يمثل درجة العقدة الأولى ، أي مجموع عناصر كل سطر تمثل درجة العقدة

البيان المتمم : ليكن لدينا البيان البسيط G نعرف البيان المتمم G إذا كان $V(G) = V(\bar{G})$ ويحقق ما يلي :

$$\forall\, uv \in E(G) \Rightarrow uv \notin E(\bar{G})$$
$$\forall\, uv \notin E(G) \Rightarrow uv \in E(\bar{G})$$

ونرمز للبيان المتمم بالرمز $\bar{G}$.

أوجد البيان المتمم للبيان G .



ملاحظة : 1) إن البيان التام متممه الأضلاع فقط .

2) $\underbrace{deg\, v}_{G \text{ في}} + \underbrace{\deg v}_{\bar{G} \text{ في}} = p - 1$ ((إذاً درجة العقدة v في G ومتممه $\bar{G}$ هو $p-1$))

3) $G + \bar{G} = k_p$

مثال

ليكن لدينا G بيان مرتبته p و v رأس من رؤوس البيان G بحيث $n \le p-1$; $deg\, v = n$

أوجد $deg\, v$ في $\bar{G}$ البيان المتمم

الحل

ليكن v رأس من V ولدينا من نص السؤال $deg\, v = n$ في البيان G
ولنفرض ان $deg\, v = m$ في البيان المتمم $\bar{G}$
ولنوجد m من الملاحظة(2) السابقة نجد $n + m = p - 1$
$\Rightarrow m = p - 1 - n$

مثلاً : إذا كانت $\deg v = 0$ في G فإن $\deg v = p - 1$ في $\bar{G}$ المتمم .

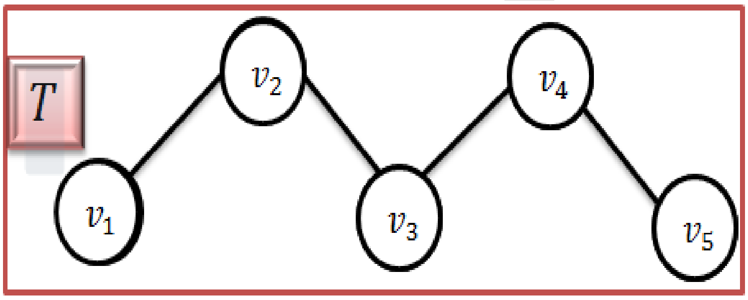
Syria Math.com

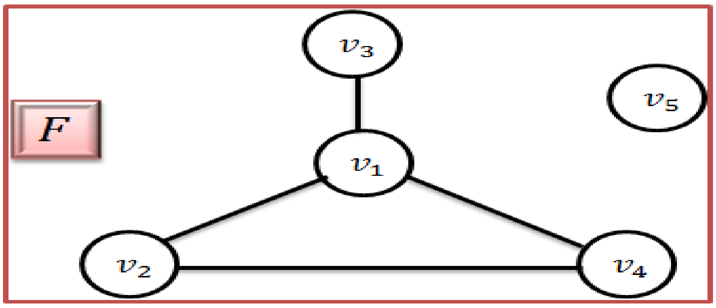
الأشجار والغابة

تعريف الغابة : نقول عن البيان G أنه غابة إذا كان لا يحتوي على حلقات ((غير مترابط))

تعريف الشجرة : نقول عن البيان G أنه شجرة إذا وفقط إذا كان G بيان مترابط ولا يحوي حلقات

ليكن لدينا البيانات التالية :





إن البيان F غير مترابط ولا يحوي على حلقات إذاً F غابة وليست شجرة
والبيان T بيان مترابط ولا يحتوي على حلقات وبالتالي البيان T شجرة وغابة

ملاحظة : كل شجرة هي غابة والعكس غير صحيح بالضرورة .

الاستقراء الرياضي

هي طريقة لأثبات صحة القضية $P(n)$ بحيث $n \geq n_0$

1) نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 1$ أو $n = n_0$ أي قيمة ابتدائية

2) نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$

3) نثبت صحة القضية " العلاقة $P(n)$ " من أجل $n = k + 1$

الاستقراء الرياضي القوي

هي طريقة لأثبات صحة القضية $P(n)$ بحيث $n \geq n_0$

1) $P(n_0)$ صحيحة " من أجل أي قيمة ابتدائية "

2) نفرض $P(i)$ صحيحة $k \geq i \geq n_0$ ونثبت صحتها من أجل $k + 1$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq n_0$

3) لأثبات المسألة من أجل $k + 1$ احتجنا $k - i_0$
يجب أن تتحقق $k - i_0 \geq n_0 \Rightarrow k \geq n_0 + i_0$
يجب أن تتحقق القضية من أجل n_0 إلى $n_0 + i_0$
ملاحظة : جميع المسائل التي تحل بالاستقراء الرياضي ممكن حلها بالاستقراء الرياضي القوي
((ولكن العكس غير صحيح))

مثال : يمكن أثباته بالاستقراء القوي ولا يمكن أثباته بالاستقراء الرياضي العادي .

برهن أن كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكتب على شكل جداء منته من الأعداد الأولية أو على شكل عدد أولي

الحل

من أجل القضية الابتدائية $n = 2$ محقق

نستخدم الاستقراء الرياضي القوي

نفرض صحتها من أجل $n = k$ ولنثبت صحتها من أجل $n = k + 1$ جداء عدد منته من الأعداد الأولية

1) نميز حالتين $n = k + 1$ عدد أولي . ((تم المطلوب))

2) $n = k + 1$ ليست بعدد أولي .

$$k + 1 = a.b \quad ; \quad a, b \in N$$

$$1 < a < k \quad , \quad 1 < b < k$$

حسب فرض الاستقراء الرياضي القوي

a جداء عدد منته من الأعداد الأولية و b جداء عدد منته من الأعداد الأولية

$n = k + 1$ جداء عدد منته من الأعداد الأولية

بطريقة الاستقراء الرياضي العادي لا يمكن أن يبرهن

نظرية : إن الشجرة من المرتبة p تملك حجم قدره $p - 1$ أي $|q| = p - 1$ عدد الأضلاع

البرهان

لنبرهن النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي القوي على p القضية محققة من أجل k_1 وهي شجرة تافهة إذا كان $q = 0 \quad , \quad p_1 = 1$ فإن $v_1 \quad : \quad k_1$ وبالتالي تم المطلوب .

لنفرض صحتها من أجل $k \geq 2$

أي بفرض أن جميع الأشجار من المرتبة التي لا تتجاوز k تحقق القضية المطلوبة

ولتكن T شجرة من المرتبة $p = k$ وعدد أضلاعه q وليكن e ضلع من شجرة T ومنه e جسر في T (لأن T لا تحوي حلقات عندئذً كل ضلع منها هو جسر) وحسب مبرهنة سابقة اي جسر لا يقع على حلقة عندئذٍ $T - e$ هي غابة ومؤلفة من مركبتين " شجرتين " $T_i = i = 1,2$ لأن $k(G - e) > k(G)$ ولتكن p_i عدد رؤوس T_i و q_i عدد أضلاع T_i وذلك أياً كانت $i = 1,2$

نجد أن : $p_i < k$ ((قسمنا الشجرة إلى قسمين p_1, p_2))

حسب الفرض الاستقرائي $q_i = p_i - 1 \quad ; \ \forall\, i = 1,2$

$$\underbrace{p}_{\text{شجرة الأصل}} = \underbrace{p_1}_{T_1\ \text{شجرة}} + \underbrace{p_2}_{T_2\ \text{شجرة}} \quad , \quad q = q_1 + q_2 + \underbrace{1}_{\text{الضلع الذي تم حذفه}} \quad \ldots (*)$$

وبتعويض $(*)$ في $q_i = p_i - 1$ نجد :

$$q = p_1 - 1 + p_2 - 1 + 1 = p - 1$$

وبالتالي تم المطلوب .

انتهت المحاضرة

إعداد : فطوم مرعي ** محمد علي فليون

Syria Math Team