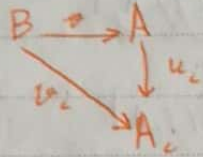


المحاضرة المادوية عشر

المدونات:

تعريف: لتكن  $I$  فئة و  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أسماء الفئة  $I$  ولنفرض  $(\mu_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$  أسرة من مورفزمات الفئة  $I$  حيث  $A \in \text{Ob}(I)$  نقول إن التسامية  $(A, (\mu_i)_{i \in I})$  تتلاءم للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$  إذا حققت:

لأجل أي أسرة  $(\nu_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}$  من مورفزمات الفئة  $I$  يوجد مورفزم  $\nu: B \rightarrow A$  تحل الحفظ التالي:

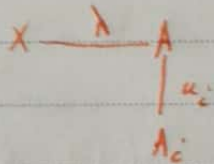


$\forall i \in I \quad \mu_i \circ \nu = \nu_i$  يتحقق:

24 مبرهنة: لتكن  $I$  فئة و  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أسماء الفئة  $I$  المسروط الآتية متكافئة:

1- التسامية  $(A, (\mu_i)_{i \in I})$  هي الأسرة  $(A_i)_{i \in I}$

2- لا مبرك  $X \in \text{Ob}(I)$  فإن:



$\Gamma: \mathcal{A}(X, A) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i)$

$\Gamma(\lambda) = (\mu_i \circ \lambda)_{i \in I}$

متباينة وغامر

البرهان: 1  $\Leftarrow$  2 لنفرض أن التسامية  $(A, (\mu_i)_{i \in I})$  هي للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$  ليكن

$\lambda, \mu \in \mathcal{A}(X, A)$  حيث  $\lambda = \mu$

$\forall i \in I \quad \mu_i \circ \lambda = \mu_i \circ \mu$  عندئذ

$\Gamma(\lambda) = (\mu_i \circ \lambda)_{i \in I} = (\mu_i \circ \mu)_{i \in I} = \Gamma(\mu)$

لتعرف العلاقة:

$\Gamma^{-1}: \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X, A_i) \rightarrow \mathcal{A}(X, A)$

بالشكل:

$\Gamma^{-1}(\nu_i)_{i \in I} = \nu$

لما كانت التنايعة  $(A, \{u_i\}_{i \in I})$  جداء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$   
 فإنه من أجل أسرة المورفزمات

$$(\nu_i: X \rightarrow A_i)_{i \in I}$$

$$\nu_i: X \rightarrow A_i \quad \text{يوجد مورفيزم وحيد}$$

$$\forall i \in I \quad u_i \circ \nu = \nu_i$$

حيث  $\nu: X \rightarrow A$  هو المورفيزم الوحيد  
 رصه فإنه  $\Gamma$  تطبيق

$$\Gamma: \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} d(X, A_i)}$$

ليزهنه على أنه

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{d(X, A)}$$

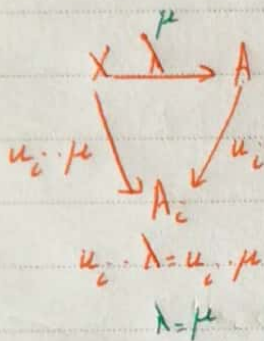
$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma: d(X, A) \rightarrow d(X, A)$$

ليكن  $\mu \in d(X, A)$  عندها:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \cdot \Gamma(\mu) &= \Gamma^{-1}(\Gamma(\mu)) \\ &= \Gamma^{-1}(\{u_i \circ \mu\}_{i \in I}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

وهذا يبين أنه:

$$\Gamma^{-1} \cdot \Gamma = I_{d(X, A)}$$



$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1}: \prod_{i \in I} d(X, A_i) \rightarrow \prod_{i \in I} d(X, A_i)$$

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \Gamma^{-1}(\{w_i\}_{i \in I}) &= \Gamma(\Gamma^{-1}(\{w_i\}_{i \in I})) \\ &= \{u_i \circ w_i\}_{i \in I} \\ &= \{w_i\}_{i \in I} \end{aligned}$$

حيث  $w_i \circ u_i = w_i$

$$u_i \circ w_i = w_i \quad \forall i \in I$$

$$\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} d(X, A_i)}$$

وهذا يبين أنه التطبيق متباين وفهم

وهذا يبين أنه التطبيق متباين وفهم

2 ← 1 لفرضنا أنه التطبيق  $\Gamma$  متباينة وغامر

لنرصد على أنه الثنائية  $(A, \{u_c, c \in I\})$  جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$  لتكن  $\Gamma: X \rightarrow A_c, c \in I$  أسرة من مورفزمات الفئة  $\mathcal{C}$

$$\{u_c\}_{c \in I} \in \prod_{c \in I} \mathcal{C}(X, A_c)$$

ولتكن  $\Gamma$  غامر يوجد  $\nu \in \mathcal{C}(X, A)$  حيث

$$\forall c \in I \quad u_c \cdot \nu = \nu_c$$

لتكن  $W \in \mathcal{C}(X, A)$  حيث:

$$u_c \cdot W = \nu_c \quad \forall c \in I$$

$$\Gamma(\nu) = (u_c \cdot \nu)_{c \in I} = (u_c)_{c \in I}$$

$$= (u_c \cdot W)_{c \in I} = \Gamma(W)$$

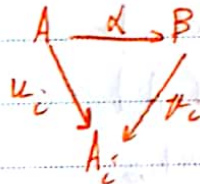
فبدأً:  $\nu = W$

ومنه فإن  $(A, \{u_c, c \in I\})$  هي جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$

25 مبرهنة: لتكن  $\mathcal{C}$  فئة  $(A_c, c \in I)$  أسرة من أسماء الفئة  $\mathcal{C}$  لفرضنا أنه لكل من

$(A, \{u_c, c \in I\})$  جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$  و  $(B, \{v_c, c \in I\})$  جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$

عندئذ يوجد مورفزم  $\alpha: A \rightarrow B$  و  $\nu_c \cdot \alpha = u_c$  حيث:



$$\forall c \in I \quad \nu_c \cdot \alpha = u_c$$

البرهان: نحاول إثبات الثنائية  $(B, \{v_c, c \in I\})$  جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$  فإنه لأجل أسرة

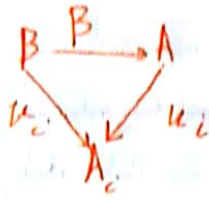
المورفزمات  $u_c: A \rightarrow A_c$  يوجد مورفزم  $\alpha: A \rightarrow B$  حيث:

$$\nu_c \cdot \alpha = u_c \quad \forall c \in I$$

لنثبت الثنائية  $(A, \{u_c, c \in I\})$  جداء للأسرة  $(A_c, c \in I)$  فإنه لأجل كل

المورفزمات  $v_c: B \rightarrow A_c$  يوجد مورفزم  $\beta: B \rightarrow A$  حيث:

$$u_c \cdot \beta = v_c \quad \forall c \in I$$



دومته:  $u_c = \nu_c \cdot \alpha = (u_c \cdot \beta) \cdot \alpha = u_c (\beta \alpha)$

$\nu_c = u_c \cdot \beta = (\nu_c \cdot \alpha) \cdot \beta = \nu_c (\alpha \cdot \beta)$

لذلك كانت النسب  $(B, (\nu_c)_{c \in I})$  هي للأسرة  $(A_c)_{c \in I}$   
فإنه التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{L}(X, B) \rightarrow \prod_{c \in I} \mathcal{L}(X, A_c)$$

متباينة وغامر

ولذلك فإنه  $\alpha \cdot \beta: B \rightarrow B$  فإنه لأجل  $X=B$  جذأه:

$$\Gamma(\alpha \beta) = (\nu_c \cdot (\alpha \beta))_{c \in I} = (\nu_c)_{c \in I}$$

$$\Gamma(I_B) = (\nu_c \cdot I_B)_{c \in I} = (\nu_c)_{c \in I}$$

$$\Gamma(\alpha \beta) = \Gamma(I_B) \Rightarrow \boxed{\alpha \beta = I_B}$$

ولذلك كانت النسب  $(A, (u_c)_{c \in I})$  هي للأسرة  $(A_c)_{c \in I}$   
فإنه التطبيق:

$$\Gamma: \mathcal{L}(X, A) \rightarrow \prod_{c \in I} \mathcal{L}(X, A_c)$$

متباينة وغامر

ولأجل  $X=A$  جذأه:

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = (u_c \cdot (\beta \cdot \alpha))_{c \in I} = (u_c)_{c \in I}$$

$$\Gamma(I_A) = (u_c \cdot I_A)_{c \in I} = (u_c)_{c \in I}$$

دومته جذأه:

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = \Gamma(I_A) \Rightarrow \boxed{\beta \alpha = I_A}$$

تعريف: لتكن  $I$  فئة و  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أشياء الفئة  $I$  اذا كانت الثانية

$$(A_i)_{i \in I} \rightarrow A \text{ مورفزمات } A_i \text{ فاننا نسمي المورفزمات } A_i \text{ جداء للأسرة } (A_i)_{i \in I}$$

$$A_i \xrightarrow{\pi_i} A \text{ جداء } A_i \text{ ونرمز لها } \pi_i \rightarrow A_i \text{ جداء } A$$

$$\pi_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$$

26 **برهنة:** لتكن  $I$  فئة و  $(A_i)_{i \in I}$  أسرة من أشياء الفئة  $I$  اذا كانت الثانية

$$(A_i)_{i \in I} \rightarrow A \text{ جداء للأسرة } (A_i)_{i \in I} \text{ عندئذ}$$

- 1- لكل  $i \in I$  يوجد مورفزم  $\tau_i: A_i \rightarrow A$  بحيث  $\pi_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$
- 2- لكل  $i \in I$  عبارة  $\pi_i$  ايمورفزم.

البرهنة: لنفرض ان الثانية  $(A_i)_{i \in I}$  هي جداء للأسرة  $(A_i)_{i \in I}$   
1- ان التطبيق:

$$\Gamma: \coprod_{i \in I} d(X, A_i) \rightarrow \prod_{i \in I} d(X, A_i)$$

$$\Gamma(\lambda) = (\pi_i \cdot \lambda)_{i \in I}$$

متباينة وغامر ولناخذ التطبيق:

$$\Gamma_j: \prod_{i \in I} d(X, A_i) \rightarrow d(X, A_j)$$

$$\Gamma_j(\lambda) = \lambda_j$$

ان  $\Gamma_j$  غامرواثة:

$$\Gamma_j \cdot \Gamma: \prod_{i \in I} d(X, A_i) \rightarrow d(X, A_j)$$

تطبيق غامر لكل  $X = A_j$  لذا ان  $\Gamma_j \cdot \Gamma \in d(A_j, A_j)$  وانه يوجد  $I_{A_j} \in d(A_j, A_j)$

$$\tau_j \in d(A_j, A)$$

حيث:

$$\Gamma_j \cdot \Gamma(\tau_j) = I_{A_j}$$

$$\Gamma_j((\pi_i \cdot \tau_j)_{i \in I}) = I_{A_j}$$

$$\pi_j \cdot z_j = I_{A_i} \quad \forall j \in I$$

c- ليكن  $\lambda, \mu$  مورفزمات للعنصر  $I$  ولنفرض أنه:

$$\lambda \cdot \pi_i = \mu \cdot \pi_i$$

وحسب (1) فإنه:

$$(\lambda \cdot \pi_i) \cdot z_i = (\mu \cdot \pi_i) \cdot z_i$$

$$\lambda \cdot (\pi_i \cdot z_i) = \mu \cdot (\pi_i \cdot z_i)$$

$$\lambda = \mu$$

انتهت المحاضرة