2018 / 4 / 15

المحاضرة الحادي عشر

الجداءات :

تعريف : لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ولنفرض أن $(u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ حيث $A\in ob(\mathcal{L})$ نقول إن الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ تشكل جداء الأسرة $(A_i)_{i\in I}$ اذا تحقق :

لأجل أي أسرة $(v_i : B \to A_i)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم وحيد $v: B \to A$ تجعل المخطط التالي :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v_i"'] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

تبديلي يحقق : $u_i \cdot v = v_i \qquad \forall i \in I$

$\boxed{24}$ مبرهنة : لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ الشروط الآتية متكافئة :

1- الثنائية $(A, (u_i : A \longrightarrow A_i)_{i\in I})$ جداء الأسرة $(A_i)_{i\in I}$

2- لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$ فإن :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] & A \arrow[d, "u_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

$$\Gamma(\lambda) = (u_i \cdot \lambda)_{i\in I}$$

متباين وغامر

البرهان : $1 \Rightarrow 2$ لنفرض أن الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ ليكن $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(X,A)$ حيث $\lambda = \mu$

عندئذ $u_i \cdot \lambda = u_i \cdot \mu \qquad \forall i\in I$

$$\Gamma(\lambda) = (u_i \cdot \lambda)_{i\in I} = (u_i \cdot \mu)_{i\in I} = \Gamma(\mu)$$

لنعرف العلاقة :

$$\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$$

بالشكل :

$$\Gamma^{-1}(v_i)_{i\in I} = v$$

/ /

لما كانت الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$
فإنه من أجل أسرة المورفيزمات

$$(v_i : X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$$

يوجد مورفيزم وحيد $v : X \longrightarrow A$

حيث $u_i \cdot v = v_i \qquad \forall\, i\in I$

ومنه فإن Γ^{-1} تطبيق

لنبرهن على أن $\Gamma\cdot\Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)}$

$$\Gamma^{-1}\cdot\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$$

إن $\Gamma^{-1}\cdot\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A)$

ليكن $\mu \in \mathcal{L}(X,A)$ عندئذ:

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}\cdot\Gamma(\mu) &= \Gamma^{-1}(\Gamma(\mu))\\ &= \Gamma^{-1}((u_i\cdot\mu)_{i\in I})\\ &= \mu\end{aligned}$$

وهذا يبين أن:

$$\Gamma^{-1}\cdot\Gamma = I_{\mathcal{L}(X,A)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\overset{\mu}{\lambda}"] \arrow[dr, "u_i\cdot\mu"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

$u_i\cdot\lambda = u_i\cdot\mu$

$\lambda = \mu$

إن $\Gamma\cdot\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i) \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)$

$$\begin{aligned}\Gamma\cdot\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) &= \Gamma(\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}))\\ &= (u_i\cdot w)_{i\in I}\\ &= (w_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

حيث W يحقق:

$$u_i\cdot W = W_i \qquad \forall\, i\in I$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "W"] \arrow[dr, "W_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

ومنه

$$\Gamma\cdot\Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I}\mathcal{L}(X,A_i)}$$

وهذا يبين أن التطبيق متباين وغامر

$2 \Rightarrow 1$ لنفرض أن التطبيق Γ متباين وغامر

لنبرهن على أن الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

لتكن $(v_i : X \to A_i)_{i\in I}$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$

$$(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i)$$

ولما كان Γ غامر يوجد $v \in \mathcal{L}(X,A)$ بحيث

$$\forall i \in I \quad u_i . v = v_i$$

ليكن $W \in \mathcal{L}(X,A)$ بحيث :

$$u_i . W = v_i \quad \forall i \in I$$

$$\Gamma(v) = (u_i . v)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$= (u_i . W)_{i\in I} = \Gamma(W)$$

نجد أن : $v = W$

ومنه فإن $(A,(u_i)_{i\in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

$\boxed{25}$ مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ لنفرض أن كل من $(A,(u_i : A \to A_i)_{i\in I})$ و $(B,(v_i : B \to A_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذ يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha : A \to B$ بحيث :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "u_i"'] & & B \arrow[dl, "v_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

$$\forall i \in I : \quad v_i . \alpha = u_i$$

البرهان : لما كانت الثنائية $(B,(v_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $u_i : A \to A_i$ يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : A \to B$ بحيث :

$$v_i . \alpha = u_i \quad \forall i \in I$$

لما كانت الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل كل المورفيزمات $v_i : B \to A_i$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta : B \to A$

بحيث : $u_i . \beta = v_i \quad \forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "v_i"'] & & A \arrow[dl, "u_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

ومنه: $u_i = v_i \alpha = (u_i . \beta) . \alpha = u_i(\beta\alpha)$

$v_i = u_i . \beta = (v_i . \alpha) . \beta = v_i(\alpha . \beta)$

لما كانت الثنائية $(B, (v_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإن التطبيق :

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,B) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

متباين وغامر

ولما كان $\alpha . \beta : B \longrightarrow B$ فإنه لأجل $X = B$ نجد أن :

$$\Gamma(\alpha\beta) = (v_i . (\alpha\beta))_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(I_B) = (v_i . I_B)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(I_B) \Rightarrow \boxed{\alpha\beta = I_B}$$

ولما كانت الثنائية $(A, (u_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

فإن التطبيق :

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X, A_i)$$

متباين وغامر

ولأجل $X = A$ نجد أن :

$$\Gamma(\beta . \alpha) = (u_i . (\beta . \alpha)) = (u_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(I_A) = (u_i . I_A)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

ومنه نجد أن :

$$\Gamma(\beta . \alpha) = \Gamma(I_A) \Rightarrow \boxed{\beta\alpha = I_A}$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ اذا كانت الثنائية $(A,(u_i : A\to A_i))_{i\in I}$ جداء للأسرة A_i فإننا نسمي المورفيزمات $u_i : A \to A_i$ المورفيزمات الاسقاطية ونرمز لها π_i : $A_i \xrightarrow{\tau_i} A \xrightarrow{\pi_i} A_i$

$\pi_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$

$\boxed{26}$ مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ اذا كانت الثنائية $(A,(u_i : A\to A_i))_{i\in I}$ جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذ،

١- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\tau_i : A_i \to A$ بحيث $\pi_i \cdot \tau_i = I_{A_i}$

٢- لأجل كل $i\in I$ فإن π_i ابيمورفيزم.

البرهان: لنفرض أن الثنائية $(A,(\pi_i)_{i\in I})$ هي جداء للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

١- إن التطبيق:

$$\Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i)$$

$$\Gamma(\lambda) = (\pi_i \cdot \lambda)_{i\in I}$$

متباين وغامر ولنأخذ التطبيق:

$$\Gamma_j : \prod_{i\in I} \mathcal{L}(X,A_i) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A_j)$$

$$\Gamma_j((W_i)_{i\in I}) = W_i$$

إن Γ_j غامر وأن:

$$\Gamma_j \cdot \Gamma : \mathcal{L}(X,A) \longrightarrow \mathcal{L}(X,A_j)$$

تطبيق غامر لأجل $X = A_j$ نجد أن:

$I_{A_j} \in \mathcal{L}(A_j, A_j)$ ومنه يوجد:

$$\tau_j \in \mathcal{L}(A_j, A)$$

بحيث:

$$\Gamma_j \cdot \Gamma(\tau_j) = I_{A_j}$$

$$\Gamma_j((\pi_i \cdot \tau_j)_{i\in I}) = I_{A_j}$$

$$\pi_j \cdot \tau_j = I_{A_i} \quad \forall j \in I$$

ب- لتكن μ, λ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ ولنفرض أنه:

$$\lambda \cdot \pi_i = \mu \cdot \pi_i$$

وحسب (1) فإنه:

$$(\lambda \cdot \pi_i) \cdot \tau_i = (\mu \cdot \pi_i) \cdot \tau_i$$

$$\lambda \cdot (\pi_i \cdot \tau_i) = \mu \cdot (\pi_i \cdot \tau_i)$$

$$\lambda = \mu$$

انتهت المحاضرة