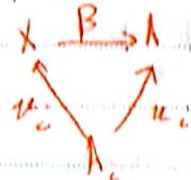


المجموعة الثانية
المجموع

لنتكلم في فئة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسماء الفئة \mathcal{A} نقول عن النسبة $(A, \mu_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I}$ انفاضا لكل مجموعا للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ اذا تحقق الشرط:
 لأجل أي أسرة أخرى $(X, \nu_i: A_i \rightarrow X)_{i \in I}$ من مورفزمات الفئة \mathcal{A} يوجد مورفزم $\beta: A \rightarrow X$ يربط $\beta \circ \mu_i = \nu_i$ لكل $i \in I$.



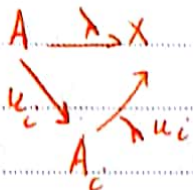
$\forall i \in I \quad \beta \circ \mu_i = \nu_i$ حيث

27) مرهنة: لنتكلم في فئة $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسماء الفئة \mathcal{A} ولنفرض أن $(A, \mu_i: A_i \rightarrow A)_{i \in I}$

أسرة من مورفزمات الفئة \mathcal{A} الشرط الثانية متكافئة:

1- الثنائية $(A, \mu_i)_{i \in I}$ تشكل مجموعا للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

2- لأجل كل $x \in \text{ob}(\mathcal{A})$ التطبيق $\Gamma_x: \mathcal{A}(A_i, x) \rightarrow \mathcal{A}(A, x)$ المعروف بالشكل



$\Gamma_x(\lambda) = (\lambda, \mu_i)_{i \in I}$ متباينة وغامر

البرهان: 1 \Leftrightarrow 2 لنأخذ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A}(A, x)$ ولكن $\lambda_1 = \lambda_2$

عندها: $\forall i \in I \quad \Gamma_x(\lambda_1) = \lambda_1 \circ \mu_i = \lambda_2 \circ \mu_i = \Gamma_x(\lambda_2)$

وبالتالي فإن Γ_x تطبيق وهذا واضح

لعرف العلاقة:

$\Gamma^{-1}: \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i, x) \rightarrow \mathcal{A}(A, x)$

$\Gamma^{-1}((\lambda_i)_{i \in I}) = \beta$

لما كان β دمي فإن Γ^{-1} تطبيق

لنبرهن على أنه: $\Gamma \circ \Gamma^{-1} = I$
 $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i, x)$

$\forall (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i, x)$

$$\Gamma \Gamma^{-1} \left((G_i)_{i \in I} \right) = \Gamma \left(\Gamma^{-1} (G_i)_{i \in I} \right) = \Gamma(\beta)$$

$$= (\beta u_i)_{i \in I} = (G_i)_{i \in I}$$

$$\beta u_i = G_i$$

$$\Gamma \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i(x)}$$

وهذه هي النتيجة

أيًا كان $\mu \in \mathcal{A}(A, X)$ فإنه:

$$\Gamma^{-1} \Gamma(\mu) = \Gamma^{-1} \left(\Gamma(\mu) \right) = \Gamma^{-1} \left((\mu u_i)_{i \in I} \right)$$

$$= \mu$$

وهذه:

$$\Gamma^{-1} \Gamma = I_{\mathcal{A}(A, X)}$$

وهذا يبين أنه التطبيق Γ متباينة وغامر

1 \Leftrightarrow 2 لفرضه أنه التطبيق Γ متباينة وغامر

ليكن $(w_i: A_i \rightarrow X)$ أسرة من مورفيزمات الفئة \mathcal{A}

ولم يكن Γ غامر يوجد $\beta \in \mathcal{A}(A, X)$ بحيث:

$$\Gamma(\beta) = (w_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\beta) = (\beta u_i)_{i \in I}$$

$$\beta u_i = w_i \quad \forall i \in I$$

ليكن $\alpha: A \rightarrow X$ مورفيزم آخر للفئة \mathcal{A} لأجله $\forall i \in I$

$$\alpha u_i = w_i$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha u_i)_{i \in I} = (w_i)_{i \in I} = \Gamma(\beta)$$

ولم يكن Γ متباينة لهذا $\alpha = \beta$

وبالتالي $(A, (u_i)_{i \in I})$ تشكل مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

مبرهنة: [28] ليكن فئة \mathcal{A} و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة \mathcal{A} لفرضه أنه لكل

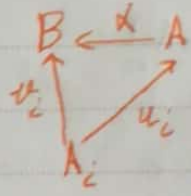
من $(A_i)_{i \in I}$ $(A, (u_i)_{i \in I}: A_i \rightarrow A)$ و $(B, (v_i)_{i \in I}: A_i \rightarrow B)$ مجموعتين للأسرة $(A_i)_{i \in I}$

عندئذ يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha: A \rightarrow B$

البرهان: لما كانت الثنائية $(A, \{\mu_i\}_{i \in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $\{\nu_i\}_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد

$$\alpha: A \rightarrow B \quad \text{حيث}$$

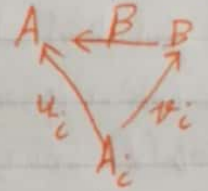
$$\forall i \in I \quad \alpha \mu_i = \nu_i$$



أيضاً لما كانت الثنائية $(B, \{\nu_i\}_{i \in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $\{\mu_i\}_{i \in I}$ يوجد مورفيزم وحيد

$$\beta: B \rightarrow A \quad \text{مورفيزم وحيد}$$

$$\forall i \in I \quad \beta \nu_i = \mu_i \quad \text{حيث}$$



$$\begin{aligned} \mu_i &= \beta \nu_i = \beta (\alpha \mu_i) \\ &= (\beta \alpha) \mu_i \\ \nu_i &= \alpha \mu_i = \alpha (\beta \nu_i) \\ &= (\alpha \beta) \nu_i \end{aligned} \quad \forall i \in I$$

لما كانت الثنائية $(A, \{\mu_i\}_{i \in I})$ هي المجموع فإنه التطبيق:

$$\Gamma: \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A, X) \rightarrow \mathcal{A}(A, X)$$

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda \mu_i)_{i \in I}$$

لأجل $X = A$ فإنه $\beta \cdot \alpha \in \mathcal{A}(A, A)$

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = ((\beta \cdot \alpha) \mu_i)_{i \in I} = (\mu_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(I_A) = (I_A \mu_i)_{i \in I} = (\mu_i)_{i \in I}$$

$$\Gamma(\beta \cdot \alpha) = \Gamma(I_A) \quad \text{ومنه}$$

$$\beta \alpha = I_A$$

بطريقة متساوية نجد أنه $\alpha \beta = I_B$ ومنه فإنه α البرمورفيزم ووحيد

تعريف: لتكن f فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أسماء الفئة f اذا كانت الثنائية

$$\mathcal{A}(A, \{\mu_i\}_{i \in I}; A_i)_{i \in I} \rightarrow \mathcal{A}(A, A_i)_{i \in I}$$

مورفيزمات الاضواء ونزولها $\forall i \in I$

سوهنة: لتكن I فئة و $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من أشياء الفئة I ولنفرضه أن النسائية $(A_i)_{i \in I}$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i \in I}$ عندئذ:

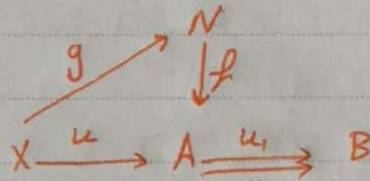
- 1- لأجل كل $i \in I$ يوجد مورفيزم $\delta_i: A \rightarrow A_i$ حيث $\delta_i \circ \tau_i = \tau_{A_i}$
- 2- لأجل كل $i \in I$ للمورفيزم τ_i مورفومورفيزم.

(وظيفة)

النواة:

تعريف: لتكن I فئة و $\mu_1, \mu_2: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة I نقول أن النسائية (N, ℓ) حيث $\ell: N \rightarrow A$ وهي نواة للمورفيزمين μ_1, μ_2 إذا حققت:

- 1- أيًا كان $X \in \text{Ob}(I)$ ولأجل كل مورفيزم $\mu: X \rightarrow A$ لحقو $\mu = \mu_1 \mu_2$ يوجد مورفيزم $g: X \rightarrow N$ حيث $\ell \circ g = \mu$



- 2- إذا كان لأجل $X \in \text{Ob}(I)$ ولأجل $\mu: X \rightarrow A$ يوجد مورفيزم $g: X \rightarrow N$ حيث $g = \mu$ فإنه: $\mu = \mu_1 \mu_2$

تعريفية: لتكن I فئة و $\mu_1, \mu_2: A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة I لنفرضه أن النسائية (N, ℓ) نواة للمورفيزمين μ_1, μ_2 عندئذ:

- 1- $\mu_1 \ell = \mu_2 \ell$
- 2- ℓ مورفومورفيزم

انتهت المحاضرة