2018 / 4 / 22

المحاضرة الثانية عشر

الجموع:

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ نقول عن الثنائية $(A,(u_i : A_i \to A)_{i\in I})$ انها تشكل مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ اذا حققت الشرط:

لأجل أي أسرة أخرى $(v_i : A_i \to X)_{i\in I}$ من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ يوجد مورفيزم وحيد $\beta : A \to X$ بحيث يجعل المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} X & A \arrow[l] \arrow[l, phantom] \\ & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] & A \\ A_i \arrow[u, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

بحيث $\beta u_i = v_i \quad \forall i \in I$

27 مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ولنفرض أن $(u_i : A_i \to A)$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$ الشروط الآتية متكافئة:

1- الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ تشكل مجموعاً لأسرة الأشياء $(A_i)_{i\in I}$

2- لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$ التطبيق $\Gamma : \mathcal{L}(A,X) \to \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)$ المعرف بالشكل:

$\Gamma(\lambda) = (\lambda u_i)_{i\in I}$ متباين وغامر

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "u_i"'] & X \\ A_i \arrow[ur, "\lambda u_i"'] & \end{tikzcd}$$

البرهان: $1 \Leftarrow 2$ لنأخذ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L}(A,X)$ ولكن $\lambda_1 = \lambda_2$

عندما: $\Gamma(\lambda_1) = \lambda_1 u_i = \lambda_2 u_i = \Gamma(\lambda_2) \quad \forall i \in I$

وبالتالي فإن Γ تطبيق وهذا واضح

لنعرف العلاقة:

$$\Gamma^{-1} : \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X) \to \mathcal{L}(A,X)$$

$$\Gamma^{-1}((w_i)_{i\in I}) = \beta$$

لما كان β وحيد فإن Γ^{-1} تطبيق

لنبرهن على أن: $\Gamma . \Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)}$

$$\forall (G_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)$$

$$\Gamma\Gamma^{-1}((G_i)_{i\in I}) = \Gamma(\Gamma^{-1}(G_i)_{i\in I}) = \Gamma(\beta)$$
$$= (\beta u_i)_{i\in I} = (G_i)_{i\in I}$$

حيث $\beta u_i = G_i$

ومنه فإنه:
$$\Gamma\Gamma^{-1} = I_{\prod_{i\in I} \mathcal{L}(A_i, X)}$$

أياً كان $\mu \in \mathcal{L}(A, X)$ فإنه:
$$\Gamma^{-1}\Gamma(\mu) = \Gamma^{-1}(\Gamma(\mu)) = \Gamma^{-1}((\mu . u_i)_{i\in I})$$
$$= \mu$$

ومنه:
$$\Gamma^{-1}\Gamma = I_{\mathcal{L}(A,X)}$$

وهذا يبين أن التطبيق Γ متباين وغامر

$2 \Rightarrow 1$ لنفرض أن التطبيق Γ متباين وغامر

ليكن $(w_i : A_i \longrightarrow X)$ أسرة من مورفيزمات الفئة $\mathcal{L}$

ولما كان Γ غامر يوجد $\beta \in \mathcal{L}(A, X)$ بحيث:
$$\Gamma(\beta) = (w_i)_{i\in I}$$
$$\Gamma(\beta) = (\beta u_i)_{i\in I}$$

ومنه فإنه: $\forall i \in I \quad \beta u_i = w_i$

ليكن $\alpha : A \longrightarrow X$ مورفيزم آخر للفئة $\mathcal{L}$ لأجله $\forall i \in I$

$\alpha u_i = w_i$ عندئذ:
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha . u_i)_{i\in I} = (w_i)_{i\in I} = \Gamma(\beta)$$

ولما كان Γ متباين نجد أن $\alpha = \beta$

وبالتالي $(A, (u_i)_{i\in I})$ تشكل مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$

$\boxed{28}$ مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ لنفرض أن كل من $(A, (u_i : A_i \longrightarrow A))_{i\in I}$ و $(B, (v_i : A_i \longrightarrow B))_{i\in I}$ مجموعتين للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذ يوجد ايزومورفيزم وحيد $\alpha : A \longrightarrow B$

البرهان: لما كانت الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $(v_i)_{i\in I}$ يوجد مورفيزم وحيد

$\alpha : A \to B$ بحيث

$$\forall i\in I \qquad \alpha u_i = v_i$$

$$\begin{tikzcd} B & A \arrow[l, "\alpha"'] \\ A_i \arrow[u, "v_i"] \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

أيضاً لما كانت الثنائية $(B,(v_i)_{i\in I})$ مجموعاً للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ فإنه لأجل أسرة المورفيزمات $(u_i)_{i\in I}$ يوجد مورفيزم وحيد

$\beta : B \to A$

بحيث: $\forall i\in I \qquad \beta . v_i = u_i$

$$\begin{tikzcd} A & & B \arrow[ll, "\beta"'] \\ & A_i \arrow[ul, "u_i"] \arrow[ur, "v_i"'] & \end{tikzcd}$$

ومنه:

$$u_i = \beta . v_i = \beta(\alpha . u_i) = (\beta\alpha) u_i$$

$$v_i = \alpha . u_i = \alpha(\beta . v_i) = (\alpha\beta) v_i$$

$$\forall i\in I$$

لما كانت الثنائية $(A,(u_i)_{i\in I})$ هي المجموع فإن التطبيق:

$\Gamma : \mathcal{L}(A,X) \to \prod_{i\in I}\mathcal{L}(A_i,X)$ متباين وغامر

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda u_i)_{i\in I}$$

لأجل $X = A$ فإن $\beta . \alpha \in \mathcal{L}(A,A)$

$$\Gamma(\beta.\alpha) = ((\beta.\alpha).u_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

$$\Gamma(I_A) = (I_A . u_i)_{i\in I} = (u_i)_{i\in I}$$

ومنه $\Gamma(\beta.\alpha) = \Gamma(I_A)$

$$\beta\alpha = I_A$$

بطريقة مشابهة نجد أن $\alpha\beta = I_B$ ومنه فإن α ايزومورفيزم وحيد

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ اذا كانت الثنائية $(A,(u_i : A_i \to A)_{i\in I})$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ سمي في هذه الحالة المورفيزمات u_i

بمورفيزمات الاحتواء ونرمز لها τ_i $\forall i\in I$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $(A_i)_{i\in I}$ أسرة من أشياء الفئة $\mathcal{L}$ ولنفرض أن الثنائية $(A,(\tau_i:A_i\to A))_{i\in I}$ مجموع للأسرة $(A_i)_{i\in I}$ عندئذ:

1- لأجل كل $i\in I$ يوجد مورفيزم $\delta_i:A\to A_i$ بحيث $\delta_i\tau_i=I_{A_i}$

2- لأجل كل $i\in I$ المورفيزم τ_i مونومورفيزم.

(وظيفة)

النواة:

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u_1,u_2:A\to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$

نقول أن الثنائية (N,f) حيث $f:N\to A$ وهي نواة للمورفيزمين u_1,u_2 اذا حققت:

1- أيا كان $X\in ob(\mathcal{L})$ ولأجل كل مورفيزم $u:X\to A$ يحقق $u_1u=u_2u$ يوجد مورفيزم وحيد $g:X\to N$ بحيث

$$f\cdot g=u$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

2- اذا كان لأجل $X\in ob(\mathcal{L})$ ولأجل $u:X\to A$ يوجد مورفيزم $g:X\to N$ بحيث $f\cdot g=u$ فإن: $u_1u=u_2u$

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $u_1,u_2:A\to B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ لنفرض أن الثنائية (N,f) نواة للمورفيزمين u_1,u_2 عندئذ:

1- $u_1\cdot f=u_2 f$

2- f مونومورفيزم

انتهت المحاضرة