2018/4/24

المحاضرة الثالثة عشر

29 تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة، $u_1 , u_2 : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ اذا تحققت الثنائية (N, f) نواة للمورفيزمين u_2 ، u_1 فإنه:

١- $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$

٢- f مونومورفيزم

البرهان: ١- حسب الشرط (٢) من التعريف لأجل $f: N \longrightarrow A$ يوجد I_N بحيث $f \cdot I_N = f$ ومنه فإنه:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[ur, "I_N"] \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

$u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$

٢- لنبرهن على أن التطبيق $f : N \longrightarrow A$ α

$$\alpha : \mathcal{L}(X, N) \longrightarrow \mathcal{L}(X, A)$$

$$\alpha(\lambda) = f \cdot \lambda$$

متباين، ليكن: $\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathcal{L}(X, N)$

$$\alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2)$$

عندئذ $f \cdot \lambda_1 = f \cdot \lambda_2$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[ur, "\lambda_1 = \lambda_2"] \arrow[r, shift left, "f \cdot \lambda_1"] \arrow[r, shift right, "f \cdot \lambda_2"'] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

وإن: $u_1 (f \cdot \lambda_1) = (u_1 \cdot f) \lambda_1$

$= (u_2 \cdot f) \lambda_1$

$= u_2 (f \lambda_1)$

أيضاً أن: $u_1 (f \lambda_2) = u_2 (f \lambda_2)$

وإن $f \lambda_1 = f \lambda_2$

وبسبب الوحدانية نجد أن: $\lambda_1 = \lambda_2$

ومنه α متباين و f مونومورفيزم.

ملاحظة: لأجل أي مورفيزمين $u_1 , u_2 : A \longrightarrow B$ في الفئة $\mathcal{L}$ بحيث $u_1 = u_2$ فإن نواة موجودة في هذين المورفيزمين

30) تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة، $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ اذا كانت كل من (N, f)، (M, μ) نواة للمورفيزمين u_2، u_1 عندئذ يوجد ايزومورفيزم وحيد

$\alpha : N \longrightarrow M$

البرهان: لنفرض أن كل من (M,μ)، (N,f) نواة للمورفيزمين u_2، u_1 لما كانت (N,f) نواة u_2، u_1 فإنه وبما أن (M,μ) نواة u_2، u_1 فإن:

$$u_1 \mu = u_2 \mu$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] & \\ N \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

عندئذ يوجد مورفيزم وحيد

$$\beta : M \longrightarrow N$$

بحيث: $f \cdot \beta = \mu$

لما كانت (M,μ) نواة u_2، u_1 وأن f مورفيزم وحقق:

$$u_1 f = u_2 f$$

يوجد مورفيزم وحيد $\alpha : N \longrightarrow M$

بحيث $\mu \cdot \alpha = f$

ومنه:

$$\mu = f \cdot \beta = (\mu \cdot \alpha) \cdot \beta = \mu (\alpha \cdot \beta)$$
$$f = \mu \cdot \alpha = (f \cdot \beta) \cdot \alpha = f \cdot (\beta \alpha)$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] \\ M \arrow[ur, "I_M = \alpha\cdot\beta"] \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & N \arrow[d] \\ N \arrow[ur, "I_N = \beta\cdot\alpha"] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

ومنه نجد أن: $\beta \alpha = I_N$

وأن: $\alpha \beta = I_M$

ومنه α ايزومورفيزم.

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة، $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ عندئذ يوجد دالي غير مباشر $F : \mathcal{L} \longrightarrow Set's$ معرف بالشكل:

$$F(X) = \{ f : f \in \mathcal{L}(A, X) \; ; \; f u_1 = f u_2$$

البرهان: ليكن $X, Y \in ob(\mathcal{L})$ بحيث $X = Y$ وليكن $\lambda \in F(X)$ عندئذ:

$$\lambda \in \mathcal{L}(X, A) = \mathcal{L}(M, A)$$

$u_1 \lambda = u_2 \lambda$

وحسب التعريف فإنه : $\lambda \in F(Y)$ ومنه $F(X) \subseteq F(Y)$

ليكن $v : N \longrightarrow M$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ للصنع :

$F(v) : F(M) \longrightarrow F(N)$

أياً كان $\lambda \in F(M) \subseteq \mathcal{L}(M, A)$

$F(v)(\lambda) = \lambda v$

واضح أنه $F(v)$ تطبيق

$F(I_D) : F(D) \longrightarrow F(D)$

$F(I_D)(\lambda) = \lambda I_D = \lambda$

ومنه فإنه : $F(I_D) = I_{F(D)}$

$u : X \longrightarrow X'$, $W : X' \longrightarrow X''$

$W.u : X \longrightarrow X''$

$F(W.u) : F(X'') \longrightarrow F(X)$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "W"] \arrow[dr, "\lambda . W"'] & X'' \arrow[d, "\lambda"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$\forall \lambda \in F(X'') ; F(W.u)(\lambda) = \lambda.(W.u)$

$= (\lambda.W)u$

$\lambda.W : X' \longrightarrow A$

$u_1(\lambda.W) = (u_1.\lambda).W$

$= (u_2.\lambda)W = u_2.(\lambda.W)$

وهذا يبين أنه : $\lambda.W \in F(X')$

$F(u) : F(X') \longrightarrow F(X)$

$F(u)(\mu) = \mu u$

$F(W.u)\lambda = (\lambda.W).u$

$= F(u)(\lambda.W)$

$W : X' \longrightarrow X''$

$F(W) : F(X'') \longrightarrow F(X')$

$F(W)\lambda = \lambda W$

$F(W.u) = F(u)(\lambda.u)$

$= F(u)(F(W)(\lambda))$

$= F(u).F(w).\lambda$

$F(w.u) = F(u).F(w)$

النواة المرافقة:

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة ، $u_1, u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dll, "g"'] & \\ X & & A \arrow[ll, "u"'] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, shift right, "u_1"'] \arrow[l, shift left, "u_2"] \end{tikzcd}$$

نقول عن الثنائية (N, f) أنها نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2

اذا تحقق:

1- لأجل كل $X \in ob(\mathcal{L})$ ولأجل كل مورفيزم $u : A \longrightarrow X$ تحقق:

$u u_1 = u u_2$

يوجد مورفيزم وحيد $g : N \longrightarrow X$ بحيث: $g.f = u$

2- اذا كان كل مورفيزم $u : A \longrightarrow X$ يوجد $g : N \longrightarrow X$

بحيث $g.f = u$ فإن $u u_1 = u u_2$

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}$ فئة ، $u_1, u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ اذا تحقق

الثنائية (N, f) نواة مرافقة u_2 ، u_1 فإن:

1- $f u_1 = f u_2$

2- f ايبومورفيزم.

البرهان: 1- حسب الشرط (2) من تعريف ولما كان لأجل المورفيزم

$f : A \longrightarrow N$

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dll, "I_N"'] & \\ N & & A \arrow[ll, "f"] \arrow[u, "f"'] & B \arrow[l, shift right, "u_1"'] \arrow[l, shift left, "u_2"] \end{tikzcd}$$

$f u_1 = f u_2$

يوجد I_N بحيث $I_N f = f$

لذا أن $f u_1 = f u_2$

ج- لدينا $f: A \longrightarrow N$ لنبرهن على أن التطبيق :

$$\beta : \mathcal{L}(N,X) \longrightarrow \mathcal{L}(A,X)$$

$\beta(\lambda) = \lambda . f$ متباين

ليكن $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L}(N,X)$ بحيث :

$$\beta(\lambda_1) = \beta(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 f = \lambda_2 f$$

وإن : $u_1(\lambda_1 . f) = \lambda_1 (f . u_1)$

$$= \lambda_1 (f . u_2)$$

$$= (\lambda_1 . f) u_2$$

إذن : $(\lambda_2 f) u_1 = (\lambda_1 f) u_2$

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "\lambda_1 , \lambda_2"'] & \\
X & A \arrow[u, "f"'] \arrow[l, "\lambda . f"] & B \arrow[l, shift right, "u_1"'] \arrow[l, shift left, "u_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\lambda_1 f = \lambda_2 f \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

بسبب الوحدانية نجد أن $\lambda_1 = \lambda_2$

ومنه β متباين فإن f ايبومورفيزم

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة , $u_1, u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ عندئذ يوجد دالي مباشر $F : \mathcal{L} \longrightarrow set's$ بحيث :

$$F(X) = \{ f : f \in \mathcal{L}(A,X) ; f u_1 = f u_2 \}$$

انتهت المحاضرة