

المحاضرة الثالثة عشر

29) تمهيدية: لتكن f فئة، $A \rightarrow B$ مورفيزمين للفئة f اذا تحققت الثانية

(الفئة N, f) ثابة للمورفيزمين u_1, u_2 فانه:

1- $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$

2- f مورنو مورفيزم

البرهان: 1- حسب الشرط (2) من التعريف للأجل $f: N \rightarrow A$ يوجد I_N

حيث $I_N \cdot f = f$ وانه فانه:

$N \xrightarrow{I_N} A \xrightarrow{u_1} B \quad u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$

2- $f: N \rightarrow A$ لتبرهنه على انه التطبيق α

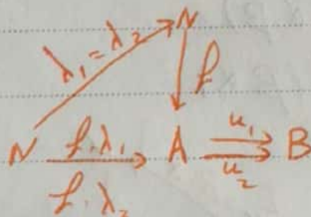
$\alpha: f(x, N) \rightarrow f(x, A)$

$\alpha(\lambda) = f \cdot \lambda$

متباين ليكن: $\lambda_1, \lambda_2 \in f(x, N)$

$\alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2)$

$f \cdot \lambda_1 = f \cdot \lambda_2$ عندئذ



فانه: $u_1 (f \cdot \lambda_1) = u_1 (f \cdot \lambda_2)$

$= (u_2 \cdot f) \lambda_1$

$= u_2 (f \cdot \lambda_1)$

أضرباً: $u_1 (f \cdot \lambda_2) = u_2 (f \cdot \lambda_2)$

$f \cdot \lambda_1 = f \cdot \lambda_2$ فانه

وسبب الوجودية لثباته: $\lambda_1 = \lambda_2$

دونه λ متباين f مورنو مورفيزم.

ملاحظة: للأجل أي مورفيزمين $A \rightarrow B$ في الفئة f حيث $u_1 = u_2$ فانه ثابة

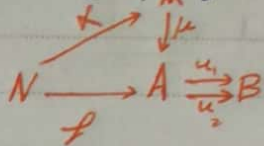
موجودة في هذه المورفيزمين

30) تعريفية: لتكن f فئة، $A \rightarrow B$ مورفزمين للفئة f اذا كانت كل من (N, f) ، (M, μ) نواة للمورفزمين μ_1, μ_2 عندئذ يوجد ايزومورفزم وحيد

$$\kappa: N \rightarrow M$$

البرهانه: لفترضنا انه لكل من (N, f) ، (M, μ) نواة للمورفزمين μ_1, μ_2 لهما نوات

(N, f) نواة μ_1, μ_2 فبانه $\mu_1 \mu = \mu_2 \mu$:
 $\mu_1 \mu = \mu_2 \mu$



عندئذ يوجد مورفزم وحيد

$$\beta: M \rightarrow N$$

$$\beta \cdot \mu = \mu$$

لما كانت (M, μ) نواة μ_1, μ_2 وانه f مورفزم وحيد:

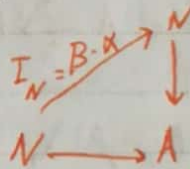
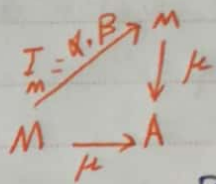
$$\mu_1 \beta = \mu_2 \beta$$

يوجد مورفزم وحيد

$$\mu \cdot \kappa = f$$

$$\mu = f \cdot \beta = (\mu \cdot \kappa) \cdot \beta = \mu (\kappa \cdot \beta)$$

$$f = \mu \cdot \kappa = (f \cdot \beta) \cdot \kappa = f (\beta \cdot \kappa)$$



$$\beta \kappa = I_N$$

وهذا هو انه:

$$\kappa \beta = I_M$$

دانه:

وهو κ ايزومورفزم.

تعريفية: لتكن f فئة، $A \rightarrow B$ مورفزمين للفئة f عندئذ يوجد دالي

عومي مباشر $F: \mathcal{A} \rightarrow \text{set's}$ معرف بالمثل:

$$F(x) = \{ f: f \in \mathcal{A}(A, x); f \mu_1 = f \mu_2 \}$$

البرهانه: لتكن $x, y \in \text{Obj } \mathcal{A}$ حيث $x = y$ وليكن $\lambda \in F(x)$ عندئذ

$$\lambda \in \mathcal{A}(x, A) = \mathcal{A}(M, A)$$

$F(X) \subseteq F(Y)$ دمج التحويلات فإنة: $\lambda \in F(Y)$ ومنه

ليكن $\mu: N \rightarrow M$ مورفيم الفئدة \mathcal{A} لتفنج:

$$F(\mu): F(M) \rightarrow F(N)$$

أيضا $\lambda \in F(M) \subseteq \mathcal{A}(M, A)$

$$F(\mu)(\lambda) = \lambda \mu$$

واضح ان $F(\mu)$ تطبيق

$$F(I_D): F(D) \rightarrow F(D)$$

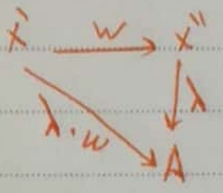
$$F(I_D)(\lambda) = \lambda I_D = \lambda$$

$$F(I_D) = I_{F(D)} \quad \text{دسته فإنة:}$$

$$\mu: X \rightarrow X', \quad W: X' \rightarrow X''$$

$$W \cdot \mu: X \rightarrow X''$$

$$F(W \cdot \mu): F(X'') \rightarrow F(X)$$



$$\forall \lambda \in F(X''); \quad F(W \cdot \mu)(\lambda) = \lambda \cdot (W \cdot \mu) = (\lambda \cdot W) \mu$$

$$\lambda \cdot W: X' \rightarrow A$$

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda \cdot W) &= (\mu_1 \cdot \lambda) \cdot W \\ &= (\mu_2 \cdot \lambda) W = \mu_2 \cdot (\lambda \cdot W) \end{aligned}$$

$\lambda \cdot W \in F(X')$ وهذا يسيرا ان:

$$F(\mu): F(X') \rightarrow F(X)$$

$$F(\mu)(\mu) = \mu \mu$$

$$\begin{aligned} F(W \cdot \mu) \lambda &= (\lambda \cdot W) \cdot \mu \\ &= F(\mu)(\lambda \cdot W) \end{aligned}$$

$$W: X' \rightarrow X''$$

$$F(W): F(X'') \rightarrow F(X')$$

$$F(W) \lambda = \lambda W$$

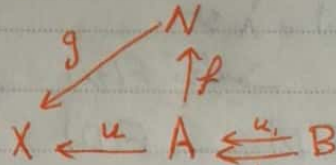
$$\begin{aligned} F(W \cdot \mu) &= F(\mu)(\lambda \cdot \mu) \\ &= F(\mu)(F(W)(\lambda)) \end{aligned}$$

$$= F(u) \cdot F(w) \cdot \lambda$$

$$F(w \cdot u) = F(u) \cdot F(w)$$

النواة المرافقة:

تعريف: لتكن f فئة، $u_1, u_2: B \rightarrow A$ مورفيزمين للفئة f



نقول ان (N, f) هي النواة المرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 اذا تحقق:

1- لكل $X \in \text{obl } f$ يوجد كل مورفيزم $X \rightarrow A$ $u: A \rightarrow X$ تحقق:

$$u u_1 = u u_2$$

يوجد مورفيزم وحيد $g: N \rightarrow X$ بحيث $g \cdot f = u$

2- اذا كانت كل مورفيزم $X \rightarrow A$ u يوجد $g: N \rightarrow X$ بحيث

$$u u_1 = u u_2 \text{ فانه } g \cdot f = u$$

تهدية: لتكن f فئة، $u_1, u_2: B \rightarrow A$ مورفيزمين للفئة f اذا تحقق

الناتجة (N, f) نواة مرافقة u_1, u_2 فانه:

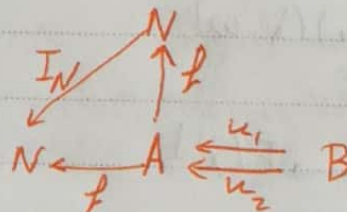
1- $f u_1 = f u_2$

2- f ايبو مورفيزم.

البرهان: 1- حسب الشرط (2) من تعريف (N, f) ولما كانت f ايبو مورفيزم

$$f: A \rightarrow N$$

$$f u_1 = f u_2$$



$I_N \cdot f = f$ يوجد I_N حيث

$f u_1 = f u_2$ فانه

c- لدينا $f: A \rightarrow N$ لتبين ان التطبيق

$$B: \mathcal{L}(N, X) \rightarrow \mathcal{L}(A, X)$$

$$B(\lambda) = \lambda \cdot f$$

مقايين $\lambda, \lambda_2 \in \mathcal{L}(N, X)$ حيث

$$B(\lambda_1) = B(\lambda_2)$$

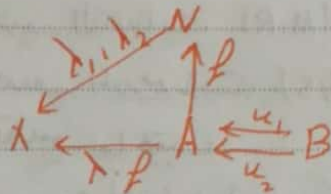
$$\lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot f$$

$$u_1 (\lambda_1 \cdot f) = \lambda_1 (f \cdot u_1) \quad \text{حيث}$$

$$= \lambda_1 (f \cdot u_2)$$

$$= (\lambda_1 \cdot f) u_2$$

$$(\lambda_2 \cdot f) u_1 = (\lambda_1 \cdot f) u_2 \quad \text{حيث}$$



$$\lambda_1 \cdot f = \lambda_2 \cdot f \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

سبب التماثلية حيث ان $\lambda_1 = \lambda_2$

ومنه B مقايين فانه لا يوجد مورفيزم

تفكيكية: لتكن f فئة، $u_1, u_2: B \rightarrow A$ مورفيزمين للفئة f عندئذ يوجد الى

مباشر $F: \mathcal{L} \rightarrow \text{sets}$ حيث

$$F(X) = \{ f : f \in \mathcal{L}(A, X); f u_1 = f u_2 \}$$

انتهى التمهيد