2018 / 4 / 29

المحاضرة الرابعة عشر

التعرف على أشياء الفئة:

تعريف: لتكن M مجموعة غير خالية نقول عن العلاقة $\rho \subseteq M \times M$ إنها علاقة تكافؤ على M إذا حققت:

1- $\forall x \in M, (x,x) \in \rho \Leftrightarrow x \rho x$

2- $\forall x,y \in M, (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$

3- $\forall x,y,z \in M, \left.\begin{array}{l}(x,y) \in \rho \\ (y,z) \in \rho\end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in \rho$

تمهيدية: إن الصنفين الآتيين:

1- صف الثنائيات (M,R) أو M_R المؤلف من المجموعات المعرف عليها

2- صف المورفزمات $u:(M,R) \longrightarrow (N,S)$ حيث $u: M \to N$ تطبيق ما يحقق:

$$\forall x,y \in M, (x,y) \in R \Rightarrow (u(x), u(y)) \in S$$

تشكل فئة نرمز لها بـ $\bar{\mathcal{L}}$

البرهان: واضح

تمهيدية: لأجل الفئة $\bar{\mathcal{L}}$ يوجد:

1- دالي مباشر: $C: \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow set's$

معرف بالشكل: $C((M,R)) = M$

2- يوجد دالي مباشر: $Q: \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow set's$

معرف بالشكل: $Q((M,R)) = M/R$

البرهان: 1- واضح أن العلاقة:

$$C: ob(\bar{\mathcal{L}}) \longrightarrow ob(set's)$$

المعرف بالشكل: $C((M,R)) = M$

هي تطبيق أشياء

لتكن $u: M_R \longrightarrow N_S$ مورفيزم للفئة $\bar{\mathcal{L}}$ لدينا:

$c(u) : c(M_R) \longrightarrow c(N_S)$

$: M \longrightarrow N$

حيث $c(u) = u$

إذن c تطبيق مورفيزمات ويحقق:

$$c(I_{M_R}) = I_M = I_{c(M_R)}$$

$$\forall u, v \in \mathcal{I} \quad c(u \cdot v) = u \cdot v = c(u) \cdot c(v)$$

c- واضح أن Q تطبيق أشياء

تطبيق مورفيزمات:

$$Q : Mor(\mathcal{I}) \longrightarrow Mor(set's)$$

ليكن: $u : M_R \longrightarrow N_S$ مورفيزم للفئة $\mathcal{I}$

$$Q(u) : Q(M_R) \longrightarrow Q(N_S)$$

$$: M_R \longrightarrow N_S$$

ليكن $\bar{a} \in M/R$ عندئذ:

$$\bar{a}_R = \{x \in M, (x, a) \in R\}$$

$$\overline{u(a)}_S = \{u(x) \in N : (u(x), u(a)) \in S\}$$

$$Q(u)(\bar{a}) = \overline{u(a)}_S$$

لنعرف: $\bar{u} : M/R \longrightarrow N/S$

$$\bar{u}(\bar{a}_R) = \overline{u(a)}_S$$

ليكن $M_R \in ob(\mathcal{I})$

$$I_{M_R} : M_R \longrightarrow M_R$$

$$Q(I_{M_R}) : Q(M_R) \longrightarrow Q(M_R)$$

$$: M/R \longrightarrow M/R$$

$$\forall \bar{a} \in M/R \quad Q(I_{M_R})(\bar{a}_R) = I_{M_R}(a) = \bar{a}_R$$

$$Q(I_{M_R}) = I_{M_R} = I_{Q(M_R)}$$

ليكن،

$$u : M_R \longrightarrow N_S$$
$$v : N_S \longrightarrow H_T$$
$$Q(v\cdot u)\,(\bar{a}_R) = \overline{v\cdot u(a)}_T$$
$$= \overline{v(\underbrace{u(a)}_{N})}$$
$$= Q(v)\,(\overline{u(a)}_S)$$
$$= Q(v)\,Q(u)\,(\bar{a}_R)$$
$$Q(v\cdot u) = Q(v)\cdot Q(u)$$

تعريف: لتكن $\mathcal{L}$ فئة و $x \in ob(\mathcal{L})$ نقول إن x معرف عليه علاقة تكافؤ إذا تحقق الشرط:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\hat{h}_x"] & \\ \bar{\mathcal{L}} \arrow[rr, "c"] & & set's \end{tikzcd}$$

$\forall y \in \mathcal{L}$

$c\cdot F(y) = \hat{h}_x(y)$

$F(y) = \mathcal{L}(y, x)$

يوجد دالي عز مباشر :

$$F : \mathcal{L} \longrightarrow \bar{\mathcal{L}}$$

حيث $c\cdot F = \hat{h}_x$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}$ فئة، $u_1, u_2 : B \longrightarrow A$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{L}$ عندئذ يوجد دالي مباشر $F : \mathcal{L} \longrightarrow set's$ حيث:

مبرهنة الخاصة السابقة $F(x) = \{f : f \in \mathcal{L}(A, x),\ f\cdot u_1 = f\cdot u_2\}$

البرهان، ليكن $x, y \in ob(\mathcal{L})$ حيث $x = y$ وليكن $f \in F(x)$ عندئذ $f \in \mathcal{L}(A, x)$ وبالتالي $f \in \mathcal{L}(A, x)$ وحقق $f\cdot u_1 = f\cdot u_2$

ومنه $f \in F(y) \Leftarrow F(x) \subseteq F(y)$

وبطريقة مشابهة نجد أن $F(y) \subseteq F(x)$

ومن الاحتوائين نجد أن $F(x) = F(y)$

ليكن $v : X \longrightarrow Y$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

$$F(v) : F(X) \longrightarrow F(Y)$$

$$\forall f \in F(X) : F(v)(f) = v\cdot f$$

وهو تطبيق

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "v \cdot f"'] & \end{tikzcd}$$

للتحقق من شروط الدالي المباشر.

لنأخذ I_Y حيث $Y \in Ob(\mathcal{L})$:

$$F(I_Y) : F(Y) \longrightarrow F(Y)$$

$$\forall \lambda \in F(Y) : F(I_Y)(\lambda) = I_Y \lambda$$

$$F(I_Y) = I_{F(Y)} = \lambda$$

$$u : X \longrightarrow Y$$

$$v : Y \longrightarrow Z$$

$$v \cdot u : X \longrightarrow Z$$

$$F(v \cdot u) : F(X) \longrightarrow F(Z)$$

$$\beta \in F(X) : F(v \cdot u)(\beta) = (v \cdot u) \cdot \beta$$

$$= v \cdot (u \cdot \beta) = F(v)(u \cdot \beta)$$

$$= F(v) \cdot (F(u)(\beta)) = F(v) F(u)(\beta)$$

$$F(v \cdot u) = F(v) \cdot F(u)$$

ومنه F دالي مباشر.

الفئات الخاصة