

تم اعطاء برهنة في المحاضرة الثالثة وقام الساتو اعادة برهان في المحاضرة هذه من البداية.

برهنة: $G: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ و $F: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ فنحن في $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ هناك مباشرة لتعرف ان

1. يوجد دالة مباشرة $\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G): \mathcal{L} \rightarrow \text{sets}$
 2. يوجد دالة مباشرة

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F): \mathcal{L} \rightarrow \text{sets}$$

الهدف: لتعرف $\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)$ من خلال تطبيق الـ \mathcal{L} في \mathcal{L}_1

1. تطبيق الـ \mathcal{L} في \mathcal{L}_1 : $\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G): \text{ob}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{ob}(\text{sets})$
 $\forall A = (A_1, B_1) \in \text{ob}(\mathcal{L})$ $A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1) = \text{ob}(\mathcal{L}_1)$
 $B \in \text{ob}(\mathcal{L}_2)$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A, B) = \mathcal{L}_1(A, G(B)) \in \text{sets}$$

تنتج \downarrow

$$\Rightarrow \{G(B) \in \text{ob}(\mathcal{L}_1), A \in \text{ob}(\mathcal{L}_1)\}$$

2. تطبيق المورفزمات:

$$f: A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{L}_1)$$

\mathcal{L}_1 مورفزم للفترة

$$f = (f_1, f_2): A(A_1, A_2) \rightarrow B(B_1, B_2)$$

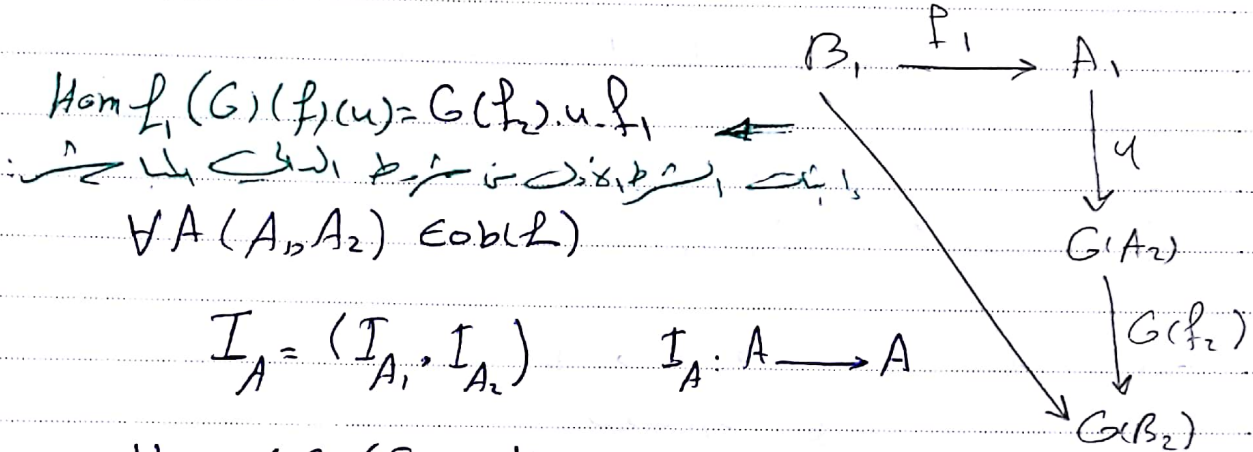
$$f_1: A_1 \rightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1(A_1, B_1)$$

$$f_2: A_2 \rightarrow B_2 \in \mathcal{L}_2(A_2, B_2)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(B)$$

$$: \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))$$

$$\forall u : A_1 \rightarrow G(A_2)$$



$$I_A = (I_{A_1}, I_{A_2}) \quad I_A : A \rightarrow A$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) : \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathcal{L}_1(A_2, G(A_2))$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) : \lambda : A_1 \rightarrow G(A_2)$$

$$\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A)(\lambda) = G(I_{A_2}) \cdot \lambda \cdot I_{A_1}$$

$$= G(I_{A_2}) \cdot \lambda = I_{G(A_2)} \cdot \lambda = \lambda$$

$\xrightarrow{\text{نفس } G \text{ داي ما حيز}}$

نلاحظ ان صورة اي عنصر في $\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A)$ هي نفسها العنصر في $\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A)$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) = I_{\mathcal{L}_1(A_1, G(A_2))} = I_{\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A)}$$

البيان شرط التاي *

(3)

1 1

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow D \quad \text{لكن}$$

↓
مؤثرات التتبع

$$f = (f_1, f_2): A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2) \quad \text{بالتالي } A, B, C, D \in \text{obj } \mathcal{L}$$

$$g = (g_1, g_2): B = (B_1, B_2) \rightarrow D = (D_1, D_2)$$

$$\mathcal{L}_1 \text{ مؤثرات في } \left\{ \begin{array}{l} f_1: A_1 \rightarrow B_1 \\ g_1: B_1 \rightarrow D_1 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}_2 \text{ مؤثرات في } \left\{ \begin{array}{l} f_2: B_2 \rightarrow A_2 \\ g_2: D_2 \rightarrow B_2 \end{array} \right.$$

$$f_1 \cdot g_1: D_1 \rightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1(D_1, A_1)$$

عوضه بـ $g_2 \cdot f_2: A_2 \rightarrow D_2 \in \mathcal{L}_2(A_2, D_2)$

$$g \cdot f = (g_1 \cdot f_1, g_2 \cdot f_2): A = (A_1, A_2) \rightarrow D = (D_1, D_2)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f) = \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \xrightarrow{\text{بالتالي}} \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(D)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f): \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathcal{L}_1(D_1, G(D_2))$$

$$\forall \mu: A_1 \rightarrow G(A_2) \in \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)):$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f)(\mu) &= G(g_2 \cdot f_2) \cdot \mu \cdot f_1 \cdot g_1 \\ \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f)(\mu) &= G(g_2) \cdot (G(f_2) \cdot \mu \cdot f_1) \cdot g_1 \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(\mu) \end{aligned}$$

(تتبع) \rightarrow G والى G

$$\text{Hom}_{L_1}(G)(f) : \text{Hom}_{L_1}(G)(A) \rightarrow \text{Hom}_{L_1}(G)(B)$$

$$: \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \rightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2)) \quad | \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Hom}_{L_1}(G)(f)(\mu) = G(g_2) \cdot \mu$$

$$= G(g_2) \cdot (\underbrace{\text{Hom}_{L_1}(G)(f)(\mu)}_{\in \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))}) \cdot g_1$$

$$= \underbrace{\text{Hom}_{L_1}(G)(g)}_{\text{دالة}} (\underbrace{\text{Hom}_{L_1}(G)(f)(\mu)}_{\text{دالة}})$$

$$\text{تكوين الدالة} = \text{Hom}_{L_1}(G)(g) \cdot \text{Hom}_{L_1}(G)(f)$$

ولكن μ اتي من \mathcal{L}_1 لظن انه من \mathcal{L}_1 اي الدالة

$$\text{Hom}_{L_1}(G)(g \cdot f) = \text{Hom}_{L_1}(G)(g) \cdot \text{Hom}_{L_1}(G)(f)$$

تكوين الدالة التي
منه من \mathcal{L}_1 $\text{Hom}_{L_1}(G)$ دالة ما شئ

② $\mu \in \mathcal{L}_1$

المثال : لغرض $\text{Hom}_{L_2}(F)$ مثال

$$\forall A = (A_1, A_2) \in \text{obj}(\mathcal{L}_1) : \text{تكوين الدالة الاسياد}$$

$$\text{Hom}_{L_2}(F)(A) = \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2) \in \text{sets}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \in \text{obj}(\mathcal{L}_1) \\ F(A_1) \in \text{obj}(\mathcal{L}_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{دالة} \\ A_2 \in \text{obj}(\mathcal{L}_2) \end{array}$$

② تكوين الدالة

$$\forall f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2)$$

مؤينة للفئة \mathcal{L} فبانه

$$f_1 : A_1 \rightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1$$

$$f_1 : B_1 \rightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1$$

$$f_2 : A_2 \rightarrow B_2 \in \mathcal{L}_2$$

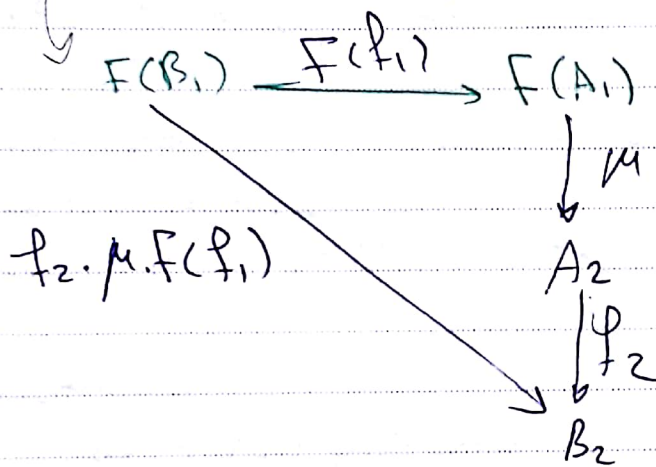
$$\text{Hom}_{L_2}(F)(f): \text{Hom}_{L_2}(F)(A) \rightarrow \text{Hom}_{L_2}(F)(B)$$

$$\text{Hom}_{L_2}(F)(f): L_2(F(A_1), A_2) \rightarrow L_2(F(B_1), B_2)$$

$$\forall \mu \in L_2(F(A_1), A_2); \mu: F(A_1) \rightarrow A_2$$

$$\text{Hom}_{L_2}(F)(f)(\mu) = f_2 \cdot \mu \cdot F(f_1)$$

نريد ان نرى ان $f_2 \cdot \mu \cdot F(f_1)$ هو صورة f_2 لـ μ ، و $F(f_1)$ هي صورة f_1 لـ μ



والآن لنثبت ان $f_2 \cdot \mu \cdot F(f_1)$ هو صورة f_2 لـ μ

$$A = (A_1, A_2) \in \text{ob}(L_2): \text{Hom}_{L_2}(F)(f_1) \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Hom}_{L_2}(F)(I_A): \text{Hom}_{L_2}(F)(A) \rightarrow \text{Hom}_{L_2}(F)(A)$$

$$\forall v \in \text{Hom}_{L_2}(F)(A): \text{Hom}_{L_2}(F)(I_A)(v) = I_{A_2} \cdot v \cdot F(I_{A_1})$$

$$= v \cdot I_{F(A_1)} = v \quad \text{حيث } v \text{ هي صورة } f_1$$

الآن نريد ان نرى ان $I_{F(A_1)}$ هي صورة I_A لـ v

$$\text{Hom}_{L_2}(F)(I_A) = I_{L_2(F(A_1), A_2)} = I_{\text{Hom}_{L_2}(F)(A)}$$

وهذا هو المطلوب

$$\forall f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \rightarrow B = (B_1, B_2)$$

$$g = (g_1, g_2) : B = (B_1, B_2) \rightarrow D = (D_1, D_2)$$

من تعريف اللقطة

$$\begin{aligned} f_1: A_1 &\rightarrow B_1 \\ f_2: A_2 &\rightarrow B_2 \\ \underline{f} & \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f_1: A_1 &\rightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1^0 \\ g_1: B_1 &\rightarrow D_1 \in \mathcal{L}_1^0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} g_1 \circ f_1: A_1 &\rightarrow D_1 \in \mathcal{L}_1^0 \\ f_1, g_1: D_1 &\rightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1 \end{aligned}$$

$$* g_2 \circ f_2: A_2 \rightarrow D_2 \in \mathcal{L}_2$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g \circ f) : \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(D)$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g \circ f) : \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2) \rightarrow \mathcal{L}_2(F(D_1), D_2)$$

$$\forall \mu \in \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2), \mu : F(A_1) \rightarrow A_2$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g \circ f)(\mu) = (g_2 \circ f_2) \circ \mu \circ F(f_1 \circ g_1)$$

$$= g_2 \circ (f_2 \circ \mu \circ F(f_1)) \circ F(g_1)$$

من تعريف F

$$= \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f_2)(\mu)$$

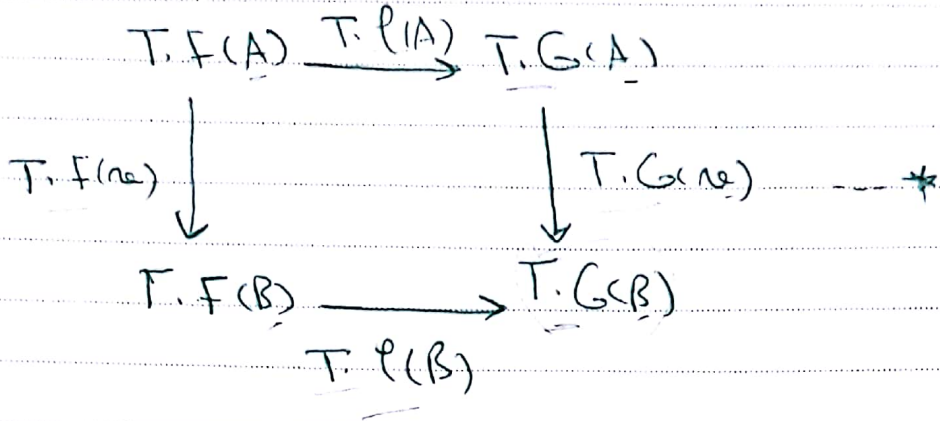
$$= g_2 \circ (\underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f_2)(\mu)}_{\in \mathcal{L}_2(F(B_1), B_2)}) \circ F(g_1)$$

$$= \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g_1) (\text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f_2)(\mu)) = \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f_2)(\mu)$$

من تعريف اللقطة

$$\Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f \circ g) = \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(f) \circ \text{Hom}_{\mathcal{L}_2}(F)(g)$$

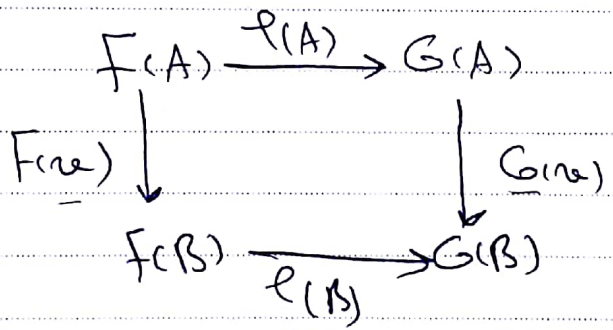
وهذا هو المطلوب



ولذلك ان الخطط اسهل بياني :

$$\begin{aligned}
 (T.G(n))(T.p(A)) &= (T.p(B)) \cdot (T.F(n)) \\
 T.G(n) \cdot T.p(A) &= T(G(n)) \cdot T(p(A)) \\
 &= T(G(n) \cdot p(A))
 \end{aligned}$$

طانه اموينم باكي فانه موينم للفة
 باه فلفط التي تبالي



لأفهموا ت :

$$\begin{aligned}
 G(n) \cdot p(A) &= p(B) \cdot F(n) \\
 T(G(n) \cdot p(A)) &= T(p(B) \cdot F(n)) \\
 &= T(p(B)) \cdot T(F(n)) \\
 T(G(n)) \cdot T(p(A)) &= T(p(B)) \cdot (T.F)(n)
 \end{aligned}$$

وهذا ان الخطط * تبالي بالتي T موينم ذلك

انتهى الحافه
 REEM-Nor

