المحاضرة التاسعة

/ /

تم اعطاء برهنة في المحاضرة الثامنة وقام الدكتور بإعادة البرهان في المحاضرة هذه من البداية.

**مبرهنة:** لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ فئتين في $F: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ و $G: \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1$
دوال مباشرة لنفرض أن $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1^{\circ} \times \mathcal{L}_2$

1. يوجد دالي مباشر $Hom_{\mathcal{L}_1}(G): \mathcal{L} \longrightarrow set's$
2. يوجد دالي مباشر

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F): \mathcal{L} \longrightarrow set's$$

**البرهان:** لنعرف $Hom_{\mathcal{L}_1}(G)$ من خلال تطبيق الأشياء والمورفيزمات:

1. تطبيق الأشياء: $Hom_{\mathcal{L}}(G) \quad ob(\mathcal{L}) \longrightarrow ob(set's)$

$\forall \; A = (A, B) \in ob(\mathcal{L})$ $\quad A \in ob(\mathcal{L}_1^{\circ}) = ob(\mathcal{L}_1)$, $B \in ob(\mathcal{L}_2)$

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A, B) = \mathcal{L}_1(A, G(B)) \in set's$$

لأن $B \in ob(\mathcal{L}_2)$

$\Rightarrow \{ G(B) \in ob(\mathcal{L}_1), \; A \in ob(\mathcal{L}_1)$

2. تطبيق المورفيزمات:

$f: A \longrightarrow B \in Mor(\mathcal{L})$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$

$$f(f_1, f_2): A(A_1, A_2) \longrightarrow B(B_1, B_2)$$

$f_1: A_1 \longrightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1^{\circ}(A_1, B_1)$

$f_1: B_1 \longrightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1(B_1, A_1)$

$f_2: A_2 \longrightarrow B_2 \in \mathcal{L}_2(A_2, B_2)$

Scanned by CamScanner

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(B)$$

$$: \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))$$

$$\forall u : A_1 \longrightarrow G(A_2)$$

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddr] & A_1 \arrow[d, "u"] \\
 & G(A_2) \arrow[d, "G(f_2)"] \\
 & G(B_2)
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}\,\mathcal{L}_1(G)(f_1)(u) = G(f_2).u.f_1 \Longleftarrow$$

إثبات الشرط الأول من شرط الدالي المباشر :

$$\forall A(A_1, A_2) \in \mathrm{ob}(\mathcal{L})$$

$$I_A = (I_{A_1}, I_{A_2}) \qquad I_A : A \longrightarrow A$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(A)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) : \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(A_2, G(A_2))$$

$$\forall \lambda \in \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) : \lambda : A_1 \longrightarrow G(A_2)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A)(\lambda) = G(I_{A_2}).\lambda.I_{A_1}$$

$$= G(I_{A_2}).\lambda \underset{\text{كون } G \text{ دالي مباشر}}{=} I_{G(A_2)}.\lambda = \lambda$$

نلاحظ أن صورة أي عنصر هي نفسه وبالتالي التطبيق هو التطبيق المطابق

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_1}(G)(I_A) = I_{\mathcal{L}_1(A_1, G(A_2))} = I_{\mathrm{Hom}\,\mathcal{L}_1(G)(A)}$$

* إثبات الشرط الثاني :

Scanned by CamScanner

/ /

$f: A \longrightarrow B$ $\qquad g: B \longrightarrow D$ لدينا

$\mathcal{L}$ مورفيزمين الفئة

وبالتالي $A, B, C, D \in ob(\mathcal{L})$ :

$$f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \longrightarrow B = (B_1, B_2)$$

$$g = (g_1, g_2) : B = (B_1, B_2) \longrightarrow D = (D_1, D_2)$$

$\mathcal{L}_1^{\circ}$ مورفيزمات في $\begin{cases} f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \\ g_1 : B_1 \longrightarrow D_1 \end{cases}$

$\mathcal{L}_1$ مورفيزمات في $\begin{cases} f_1 : B_1 \longrightarrow A_1 \\ g_1 : D_1 \longrightarrow B_1 \end{cases}$

$$f_1 \cdot g_1 : D_1 \longrightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1(D_1, A_1)$$

مورفيزمات في $\mathcal{L}_2$ $\quad g_2 \cdot f_2 : A_2 \longrightarrow D_2 \in \mathcal{L}_2(A_2, D_2)$

$$g \cdot f = (g_1 \cdot f_1, g_2 \cdot f_2) : A = (A_1, A_2) \longrightarrow D = (D_1, D_2)$$

وبالتالي

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f) = Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(D)$$

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f) : \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(D_1, G(D_2))$$

$$\forall \mu : A_1 \longrightarrow G(A_2) \in \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) :$$

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(g \cdot f)(\mu) = G(g_2 \cdot f_2) \cdot \mu \cdot f_1 \cdot g_1$$

(تجميعية (.) مباشر دالي $G$) $= G(g_2) \cdot (G(f_2) \cdot \mu \cdot f_1) \cdot g_1$

$$= Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(\mu)$$

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f) : Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(B)$$

$$: \mathcal{L}_1(A_1, G(A_2)) \longrightarrow \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))$$

$$Hom\,\mathcal{L}_1(G)(f)(\mu) = G(f_2).\mu.f_1$$

$$= G(g_2).\underbrace{\left(Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(\mu_1)\right).g_1}_{\in \mathcal{L}_1(B_1, G(B_2))}$$

$$= \underbrace{Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(g)}_{\text{تطبيق}} \left(\underbrace{Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f)(\mu_1)}_{\text{تطبيق}}\right)$$

تركيب التطبيقات $= Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(g).Hom\,G(g)(\mu)$

ولكن $\mu$ اختيارية من المنطلق ومنه يتساوى التطبيقان:

$$Hom_{\mathcal{L}_1}(G_1)(g.f) = Hom(G)(g).Hom_{\mathcal{L}_1}(G)(f)$$

تحقق الشرط الثاني

ومنه فإن $Hom_{\mathcal{L}_1}(G)$ دالي مباشر.

② برهان $\boxed{2}$

أولاً: لنعرف $Hom_{\mathcal{L}_2}(F)$ من خلال:

1- تطبيق الأشياء:

$$\forall A = (A_1, A_2) \in ob(\mathcal{L})$$

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A) = \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2) \in sets$$

لأن $\begin{cases} A_1 \in ob(\mathcal{L}_1) \\ F(A_1) \in ob\,\mathcal{L}_2 \end{cases}$ $A_2 \in ob\,\mathcal{L}_2$

② تطبيق المورفيزمات:

$$\forall f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \longrightarrow B = (B_1, B_2)$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}$ فيه:

$$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1^{\circ}$$

$$f_1 : B_1 \longrightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1$$

$$f_2 : A_2 \longrightarrow B_2 \in \mathcal{L}_2$$

Scanned by CamScanner

/ /

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f): Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(B)$$

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f): \mathcal{L}_2(F(A_1),A_2) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(B_1),B_2)$$

$$\forall \mu \in \mathcal{L}_2(F(A_1),A_2)\ ;\ \mu: F(A_1) \longrightarrow A_2$$
$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f)(\mu) = f_2 . \mu . F(f_1)$$

نلاحظ أن $F(f_1)$ و $\mu$ و $f_2$ جميعها مورفيزمات في $\mathcal{L}_2$ وبالتالي تركيبهم عكسي.

$$\begin{tikzcd}
F(B_1) \arrow[r, "F(f_1)"] \arrow[ddr, "f_2 . \mu . F(f_1)"'] & F(A_1) \arrow[d, "\mu"] \\
 & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
 & B_2
\end{tikzcd}$$

والآن لنثبت شروط الدالي المباشر :

(1) $A = (A_1, A_2) \in ob(\mathcal{L})$ : $\cancel{Hom(F)(I_A)}$.

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(I_A): Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A)$$

$$\forall v \in Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A): Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(I_A)(v) = I_{A_2} . v . F(I_{A_1})$$

$$= v . I_{F(A_1)} = v$$

$F$ دالي مباشر :

أي صورة كل عنصر هي نفسه وبالتالي هو التطبيق المطابق أي :

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(I_A) = I_{\mathcal{L}_2(F(A_1),A_2)} = I_{Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A)}$$

Scanned by CamScanner

(6)

دهس الشرط ②:

$\forall f = (f_1, f_2) : A = (A_1, A_2) \longrightarrow B = (B_1, B_2)$

$g = (g_1, g_2) : B = (B_1, B_2) \longrightarrow D = (D_1, D_2)$

$\mathcal{L}$ مورفيزمات للفئة

$f_2 : B_2 \to A_2$

$g_2 : D_2 \to B_2$

$g_2 f_2$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \in \mathcal{L}_1^{\circ} \\ g_1 : B_1 \longrightarrow D_1 \in \mathcal{L}_1^{\circ} \end{array}\right\} g_1 . f_1 : A_1 \longrightarrow D_1 \in \mathcal{L}_1$$

$$f_1 . g_1 : D_1 \longrightarrow A_1 \in \mathcal{L}_1$$

$$* \quad g_2 . f_2 : A_2 : A_2 \longrightarrow D_2 \in \mathcal{L}_2$$

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g.f) : Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(D)$$

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g.f) : \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(D_1), D_2)$$

$$\forall \mu \in \mathcal{L}_2(F(A_1), A_2) ; \ \mu : F(A_1) \longrightarrow A_2$$

$$Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g.f)(\mu) = (g_2 . f_2) . \mu . F(f_1 . g_1)$$

$$= g_2 . \underbrace{(f_2 . \mu . F(f_1))}_{= Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f)(\mu)} F(g_1)$$

F تغاير

$$= g_2 . \underbrace{(Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f)(\mu))}_{\in \mathcal{L}_2(F(B_1), B_2)} . F(g_1)$$

$$= Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g)\left(Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f)(\mu)\right) = Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g) . Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(B)(\mu)$$

تركيب دوال

$$\Longrightarrow Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f.g) = Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(f) . Hom_{\mathcal{L}_2}(F)(g)$$

ومنه تحقق الشرط الثاني وبالتالي $Hom_{\mathcal{L}_2}(F)$ دالي متغاير.

مبرهنة (واجبية):

ليكن $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ فئتين وليكن $G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دالي قريبا

ولتكن ... هي فئة الجريات لتأخذ الضرب $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$

عندئذٍ يوجد دالي قريبا:

$Hom_{\mathcal{L}_1}(G): \mathcal{L} \longrightarrow$ ...

مبرهنة: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات ولتكن $F, G: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة و $T: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ دالة مباشرة

ولتكن $\varphi: F \to G$ مورفيزم دالي عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي بالشكل:

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1);\ T\varphi(A) = T(\varphi(A))$$

البرهان: اذا كان كل من $T, G, F$ دوال مباشرة فالتركيب مباشرة $T\cdot F,\ T\cdot G: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_3$

لنفرض أن $\varphi: F \longrightarrow G$ مورفيزم دالي

لنعرف: $T\cdot\varphi: T\cdot F \longrightarrow T\cdot G$

بالشكل التالي:

$$\forall A \in ob(\mathcal{L}_1): T\varphi(A) = T(\varphi(A))$$

اذا كان $\varphi$ مورفيزم دالي فإن:

$\varphi(A): F(A) \longrightarrow G(A)$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$ وبينه

$T(\varphi(A)): T(F(A)) \longrightarrow T(G(A))$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

$T\cdot\varphi(A): T\cdot F(A) \longrightarrow T\cdot G(A)$

ليكن: $u: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$

Scanned by CamScanner

$$\begin{tikzcd}
T.F(A) \arrow[r, "T.\ell(A)"] \arrow[d, "T.F(\alpha)"'] & T.G(A) \arrow[d, "T.G(\alpha)"] \\
T.F(B) \arrow[r, "T.\ell(B)"'] & T.G(B)
\end{tikzcd} \quad \text{---} *$$

ولنبرهن أن المخطط السابق تبديلي :

$$(T.G(\alpha))(T.\ell(A)) = (T.\ell(B)).(T.F(\alpha)).$$

$$T.G(\alpha)(T.\ell(A)) = T(\underbrace{G(\alpha)}_{\in L_2}).T(\underbrace{\ell(A)}_{\in L_2})$$

$$= T(G(\alpha).\ell(A))$$

طالما أن ℓ إيزومورفيزم دالي فإنه مورفيزم للفئة $L_1$

فإن المخطط الآتي تبديلي .

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\ell(A)"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(A) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\
F(B) \arrow[r, "\ell(B)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

$$G(\alpha).\ell(A) = \ell(B).F(\alpha)$$

لنأخذ صورة طرفيه بـ T :

$$(T(G(\alpha).\ell(A)) = T(\ell(B).F(\alpha)).$$

$$= T(\ell(B)).T(F(\alpha))$$

$$T.G(\alpha).T.\ell(A) = T.\ell(B).(T.F)(\alpha)$$

ومنه نجد أن المخطط * تبديلي وبالتالي $T.\ell$ مورفيزم دالي

انتهت المحاضرة

REEM-Nor

٢٠١٨

ALADID

الحضارة

Scanned by CamScanner