المحاضرة العاشرة

تمهيدية: لتكن $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ فئات و $F_1, F_2 : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ ، $F_3 : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ دوال مباشرة

لنفرض أن $\psi : F_1 \to F_2$ مورفيزم دالي عندئذ يوجد مورفيزم دالي آخر

$\psi \cdot F_3 : F_1 F_3 \to F_2 F_3$ معرف بالشكل

$$\psi \cdot F_3(A) = \psi(F_3(A)) \qquad \forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$$

البرهان: بما أن $F_2 . F_3 : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3$ ، $F_1 . F_3$ دوال مباشرة

لنعرف $\psi F_3 : F_1 . F_3 \to F_2 . F_3$

بالشكل $\forall A \in ob(\mathcal{L}_1)$ فإن:

$\psi F_3(A) = \psi(F_3(A))$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_3$

ليكن $u : A \to B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$

$$\begin{tikzcd}
F_1 . F_3(A) \arrow[r, "\psi F_3(A)"] \arrow[d, "F_1 . F_3(u)"'] & F_2 . F_3(A) \arrow[d, "F_2 . F_3(u)"] \\
F_1 . F_3(B) \arrow[r, "\psi F_3(B)"'] & F_2 F_3(B)
\end{tikzcd}$$

$$F_2 F_3(u)\, \psi F_3(A) = \psi F_3(B) . F_1 F_3(u)$$

$$F_2 . F_3(u)\, \psi F_3(A) = F_2(F_3(u)) . \psi F_3(A) \ldots$$

بما أن ψ مورفيزم دالي فإن u مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
F_1(A) \arrow[r, "\psi(A)"] \arrow[d, "F_1(u)"'] & F_2(A) \arrow[d, "F_2(u)"] \\
F_1(B) \arrow[r, "\psi(B)"'] & F_2(B)
\end{tikzcd}$$

أي أن: $F_2(u) \cdot \psi(A) = \psi(B) \cdot F_1(u)$

ومنه بالتعويض نجد:

$= \Psi_{F_3}(B) F_1(F_3(u))$

$= \Psi_{F_3}(B) F_1 . F_3(u)$

ومنه Ψ_{F_3} مورفيزم دالي.

تكافؤ الفئات:

تعريف: ليكن $F : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ دال مباشر نقول ان F تكافؤ فئات اذا وجد دالي مباشر $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ وايزومورفيزمات دالية $\varphi : I_{\mathcal{L}_1} \rightarrow G.F$ ، $\Psi : I_{\mathcal{L}_2} \rightarrow F.G$ تحقق

$$F.\varphi = \Psi.F$$

مرهنة: اذا كان $F : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ تكافؤ فئات دالي مباشر حينئذ:

1) لاجل كل $A, B \in ob\,\mathcal{L}_1$ التطبيق:

$$F_{A,B} : \mathcal{L}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{L}_2(F(A), F(B))$$

تقابلي متقابل

2) لاجل كل $M \in ob(\mathcal{L}_2)$ يوجد $N \in ob(\mathcal{L}_1)$ بحيث:

$$F(N) \cong M$$

البرهان: لما كان F تكافؤ فئات فإنه يوجد دالي $G : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ وايزومورفيزمات دالية

$$\varphi : I_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G.F \quad , \Psi : I_{\mathcal{L}_2} \longrightarrow F$$

تحقق $F.\varphi = \Psi.F$

1) ليكن $u, v \in \mathcal{L}_1(A,B)$ بحيث

$$F_{A,B}(u) = F_{A,B}(v)$$

ومنه $G.F(u) = F.G(v)$

ولما كان e مورفيزم دالي فإن u مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$ فإن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e(A)"] \arrow[d, "u"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(u)"] \\
B \arrow[r, "e(B)"'] & G.F(B)
\end{tikzcd}$$

$$G.F(u).e(A) = e(B).u$$

ولما كان e إيزومورفيزم دالي.

$$e(B)^{-1} : GF(B) \longrightarrow B$$

$$e(B)^{-1}.G.F(u)\,e(A) = e(B)^{-1}.e(B).u$$

$$e(B)^{-1}.G.F(u)\,e(A) = I_B.u = u \qquad (1)$$

ولما كان e مورفيزم دالي فإن لأجل المورفيزم v المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e(A)"] \arrow[d, "v"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(v)"] \\
B \arrow[r, "e(B)"'] & G.F(B)
\end{tikzcd}$$

فإن:

$$G.F(v).e(A) = e(B).v$$

$$e(B)^{-1}.G.F(v).e(A) = e(B)^{-1}.e(B).v \qquad (2)$$

$$= v$$

ومنه فإن $u = v$ وبالتالي F متباين

$$w : F(A) \longrightarrow F(B)$$ لنبرهن أن F تام يلي:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "\ell(A)"'] & B \arrow[d, shift left, "\ell(B)"] \\
G.F(A) \arrow[r, "G(w)"'] & G.F(B) \arrow[u, shift left, "\ell(B)^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

إذا $w^* = \ell(B)^{-1} G(w) . \ell(A) \in \mathcal{L}_1(A, B)$

مورفيزم للفئة $\mathcal{L}_1$

لنبرهن أن $F(w^*) = w$

$$F(w^*) = F\left(\ell(B)^{-1} . G(w) . \ell(A)\right)$$

$$= F(\ell(B)^{-1}) . F.G(w) . F.\ell(A)$$ F دالي مباشر

$$= F(\ell(B)^{-1}) . F.G(w) . \psi\, F(A)$$ $F.\ell = \psi . f$

لذلك ψ مورفيزم دالي فإن المخطط الآتي تبديلي نأخذ المورفيزم w

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\psi(F(A))"'] & F(B) \arrow[d, "\psi(F(B))"] \\
F.G(F(A)) \arrow[r, "F.G(w)"'] & F.G(F(B))
\end{tikzcd}$$

$$\psi(F(B)) . w = \boxed{F.G(w) . \psi(F(A))}$$

نعوض $F(w^*) = F(\ell(B)^{-1}) . \psi F(B) . w = F(\ell(B)^{-1} . F(\ell(B))) . w$

$$= F[(\ell(B)^{-1}) \ell(B)] . w = F(I_B) . w =$$

$$I_{F(B)} . w = w$$

ومنه F تام

ع لكل $M \in obj(\mathcal{L}_2)$ عندئذٍ

$G(M) \in obj(\mathcal{L}_1)$

لنفرض أن $N = G(M)$

وبالتالي، ψ ايزومورفيزم دالي ... :

$\psi : M \longrightarrow F(N)$ ايزومورفيزم للفئة $\mathcal{L}_2$ ومنه

$F(N) \cong M$

انتهت المحاضرة