◄ دكتور المادة: برلنت مطيط

◄ المحاضرة: الرابعة عشر والخامسة عشر   عنوان المحاضرة: الطرائق ذات الخطوات المتعددة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ طريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة

٢ـ طرائق ذات الخطوات المتعددة

٣ـ طريقة آدمز-باشفورت و طريقة آدمز-مولتون

ماهو الخطأ الاعظمي ـ الخطأ الكلي بطريقة اولر ؟

ان الخطأ الكلي هو خطأ الطريقة + خطأ التدوير ويكون

$$E_{max} = |y(x_i) - y_i| \leq \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{L} + \frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L(x_i-a)} - 1\right] + |\delta_0| e^{L(x_i-a)}$$

حيث δ هي خطأ التدوير الأعظمي $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{M-1}\}$

$$M \geq |y''|$$

$$L \geq \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

لحساب خطأ التدوير δ_i المرتب بالتقريب y_i

حيث β عدد الارقام بعد الفاصلة ; $\delta_i = 0.5 \times 10^{-\beta}$

مثال $z_1 = 1.04837 \quad \Rightarrow \delta_1 = 0.5 \times 10^{-5}$

طريقة رانـج كوتا :

تحتاج طريقة أولر إلى خطوة صغيرة (قيمة h يجب أن تكون صغيرة) للحصول على دقة معقولة فإنها لا تستخدم كثيراً في التطبيقات العملية ، ذلك فإن طريقة تايلور من المراتب العليا غير مرغوبة كاسلوب عام لحل المعادلات التفاضلية لأنها تتطلب إجراء حسابات لإيجاد قيم التابع $f(x,y)$ ومشتقاته ، ممت يجعلها معقدة ومكلفة زمنياً بالنسبة لكثير من المسائل لكثير من المسائل ، أما طريقة رانج كوتا فتعد من أهم الطرائق المستخدمة لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية فهي تمكننا من الحصول على دقة عالية مع تجنب الحاجة إلى اشتقاق التابع $y(x)$

إن الشكل العام للحل التقريبي بطرائق رانج كوتا هو $y_{i+1} = y_i + \emptyset h$ حيث $\emptyset$ هي مقدار الزيادة أو الميل ، ونلاحظ ان $\emptyset = \emptyset(x,y,h)$

ويمكن أن يعبر عنها بالشكل $\emptyset = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$

إذ تمثل عبارة الميل في هذه الحالة المعدل الموزون للكيول المقدرة .

تقسم طرائق رانج كوتا الى عدة مراتب كالتالي:

رانج كوتا من المرتبة الثانية (او طريقة نقطة المنتصف)

تعتبر طريقة نقطة المنتصف من طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية يتم إيجاد قيم التقريب بالعلاقة الأتية:

$$y_0 = a$$

$$(*) \qquad y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \qquad i = 1,2,3,\ldots.n-1$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h_1 \quad , \quad y_i + q_{11}k_1h)$$

يوجد أربعة وسطاء ممثلين بالعبارة a_1, a_2, p_1, q_{11} باستخدام نشر تايلور :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_1,y_1)h + \frac{1}{2!}f'(x_1,y_1)h^2$$

نعوض في المعادلة $(*)$ فنجد :

$$, \quad a_2p_1 = \frac{1}{2} \qquad , \quad a_2q_{11} = \frac{1}{2}a_1 + a_2 = 1$$

الوسطاء الاربعة يجب أن يحققوا المعادلات التالية وبهذا لدينا ثلاث معادلات بأربعة مجاهيل ،نختار قيمة لأحد المجاهيل ولتكن a_2 نوجد القيم الأخرى بدلالتها فنجد أن :

$$q_{11} = \frac{1}{2a_2} \quad \text{و} \quad p_1 = \frac{1}{2a_2} \quad \text{و} \quad a_1 = 1 - a_2$$

إن خطأ القطع المحلي لطريقة المنتصف من المرتبة $O(h^2)$ (يمكن استنتاج ذلك من سلسلة تايلور)

يندرج تحت طريقة نقطة المنتصف ثلاث طرق بتعويض a_2 بقيم مختلفة ومنها:

١–طريقة اولر المعدلة

نحصل عليها من طريقة المنتصف بوضع $a_2 = 1$ وفي هذه الحالة يكون :

$$q_{11} = \frac{1}{2} \quad , \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = 0$$

نعوض في $$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

فنجد $$y_{i+1} = y_i + (k_2)h$$

حيث $$k_2 = f(x_i + p_1h_1 \quad , \quad y_i + q_{11}k_1h) \quad \text{و} \quad k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$\Rightarrow k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h_1 \quad , \quad y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

٢– طريقة هين

نحصل عليها من طريقة المنتصف بوضع $a_2 = \frac{1}{2}$ وفي هذه الحالة يكون :

$$q_{11} = 1 \quad , \quad p_1 = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

نعوض فنجد $$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

حيث $$k_2 = f(x_i + h \ , \ y_i + k_1h) \quad \text{و} \quad k_1 = f(x_i, y_i)$$

مثال :

باستخدام طريقة هين أوجد الحل التقريبي لمسالة الشرط الابتدائي :

$$y' = -y + x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \qquad h = 0.1$$

الحل :

تعطى معادلات هين بالشكل :

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

نطبق طريقة هين حيث $f(x_i, y_i) = -y_i + x_i + 1$

$$k_1 = f(x_i\,, y_i) \quad \Longrightarrow \quad k_1 = -y_i + x_i + 1 \ldots\ldots (*)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h \ \ , y_i + q_{11} k_1 h) \ \Longrightarrow k_2 = f(x_i + h \ \ , y_i + k_1 h)$$

$$k_2 = f(x_i + 0.1\,, y_i + 0.5k_1) = -(y_i + 0.1k_1) + (x_i + 0.1) + 1 \quad (**)$$

$$\Longrightarrow k_2 = -y_i - 0.1k_1 + x_i + 1.1$$

لدينا $h = 0.1$ ومنه فإن عدد الخطوات : $M = \frac{1-0}{0.1}$ وبالتالي فسنوجد $i = 0,1,2, \ldots\ldots 10$

$$x_i = ih$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

$$x_{10} = 1$$

نقوم بحساب y_1 نحسب من أجل ذلك k_1 و k_2 أولاً نعوض في $(**)$ $(*)$

من الفرض لدينا $x_0 = 0 \ \ , \ y_0 = 1$

$$k_1 = -y_0 + x_0 + 1 = -1 + 0 + 1 \Rightarrow \qquad k_1 = 0$$

$$k_2 = -y_0 - 0.1k_1 + x_0 + 1.1 = -1 + 0.1(0) + 0 + 1.1 \quad \Longrightarrow \ k_2 = 0.1$$

نعوض في العلاقة التكرارية y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \Longrightarrow y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0.1)\right)0.1$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0.1)\right)0.1 \Rightarrow \qquad y_1 = 1.005$$

ولنتابع بالخوارزمية التالية من أجل y_2 نحسب من أجل ذلك k_1 و k_2 أولاً

$$k_1 = -y_1 + x_1 + 1 = -1.005 + 0.1 + 1 \Rightarrow \qquad k_1 = 0.095$$

$$k_2 = -y_1 - 0.1k_1 + x_1 + 1.1 = -1.005 - 0.1(0.095) + 0.1 + 1.1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 0.1855$$

نعوض في العلاقة التكرارية y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h \Rightarrow y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{2}(0.095) + \frac{1}{2}(0.1855)\right)0.1$$

$$y_2 = 1.005 + \left(\frac{1}{2}(0.095) + \frac{1}{2}(0.1855)\right)0.1 \Rightarrow \qquad y_2 = 1.01903$$

ونتابع هكذا من أجل $y_3, y_4, ..., y_{10}$ مبينة القيم في الجدول الاتي

x_n	y_{n+1}
٠	١
0.1	1.005
0.2	1.019025
0.3	1.041217625
0.4	1.070801951
0.5	1.107075765
0.6	1.149403568
0.7	1.197210229
0.8	1.249975257

ملاحظة: من أجل حساب $\mathbf{k_1, k_2}$ في هذه الطرق يمكننا حفظ القوانين مباشرة أو حفظ طريقة الإستنتاج

٣- طريقة راستون

نحصل عليها من طريقة المنتصف بوضع $a_2 = \frac{3}{2}$ وفي هذه الحالة يكون :

$$q_{11} = \frac{3}{4} \quad , \quad p_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

نعوض فنجد $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$

حيث $k_2 = f\left(x_1 + \frac{3}{4}h_1 y_1 + \frac{3}{4}k_1 h\right)$ و $k_1 = f(x_1, y_1)$

مثـــال

باستخدام طريقة رالستون أوجد الحل التقريبي يمسألة القيم الابتدائية :

$$y' = \frac{(x-y)}{2} \quad ; 0 \le x \le 1 \quad , \quad h = 0.1$$

الحـــل :

إن صيغة معادلة رالستون تعطى :

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

نوجد k_1, k_2

$$k_1 = f(x_i , y_i) \implies k_1 = \frac{x_i - y_i}{2} \dots \dots . (*)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h \ , y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right) \implies k_2 = \frac{\left(x_i + \frac{3}{4}h\right) - \left(y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)}{2} \dots \dots . (**)$$

من الفرض

$$h = 0.1 \implies M = \frac{b-a}{h} \implies \frac{1-0}{0.1} = 10$$

نوجد قيم x_i

$$x_i = x_0 + nh \implies x_i = nh$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

$$x_{10} = 1$$

نقوم بحساب y_1 نحسب من أجل ذلك k_1 و k_2 أولاً

من الفرض لدينا $y_0 = 1$, $x_0 = 0$, $h = 0.1$ نعوض في $(*), (**)$

$$k_1 = \frac{x_0 - y_0}{2} = \frac{0-1}{2} \Rightarrow \qquad k_1 = -0.5$$

$$k_2 = \frac{x_0 - y_0 + \frac{3}{4}(0.1)(1-k_1)}{2} = \frac{0 - 1 + \frac{3}{4}(0.1)(1-(-0.5))}{2} \Rightarrow k_2 = -0.44375$$

نعوض في العلاقة التكرارية y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h \Rightarrow y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{3}(-0.5) + \frac{2}{3}(-0.44375)\right)0.1$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}(-0.5) + \frac{2}{3}(-0.44375)\right)0.1 \Rightarrow \qquad y_1 = 0.95375$$

ولنتابع بالخوارزمية من أجل y_2 نحسب من أجل ذلك k_1, k_2 نعوض في $(*), (**)$

$$k_1 = \frac{x_1 - y_1}{2} = \frac{0.1 - 0.95375}{2} \Rightarrow \qquad k_1 = -0.42688$$

$$k_2 = \frac{x_1 - y_1 + \frac{3}{4}(0.1)(1-k_1)}{2} = \frac{0.1 - 0.95375 + \frac{3}{4}(0.1)(1-(-0.42688))}{2}$$

$$\Rightarrow k_2 = -0.44375$$

نعوض في العلاقة التكرارية y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{3}(-0.42688) + \frac{2}{3}(-0.37337)\right)0.1$$

$$y_1 = 1 + \left(\frac{1}{3}(-0.42688) + \frac{2}{3}(-0.37337)\right)0.1 \Rightarrow \qquad y_2 = 0.91463$$

نتابع بنفس الطريقة نحصل على القيم التقريبية لحل المعادلة التفاضلية المبينة من الجدول الاتي:

x_n	y_{n+1}
0	1
0.1	0.95375
0.2	0.914629688
0.3	0.88229149
0.4	0.85640478
0.5	0.836655047
0.6	0.822743114
0.7	0.814384387
0.8	0.811308148
0.9	0.813256876

٤-طريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة

في الحالة العامة لا نستخدم طريقة رانج-كوتا من المرتبة الثالثة وإنما الاستخدام الشائع لها بأن تكون من المرتبة الرابعة وتعطى معادلتها كالتالي:

$$y_0 = \alpha$$

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\,, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\,, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h\,f(x_i + h\,, y_i + k_3)$$

$$\vdots$$

$$y_i + 1 = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

مثـــال

أوجد الحل التقريبي لمسألة القيمة الابتدائية باستخدام طريقة رانج- كوتا من المرتبة الرابعة :

$$y' = -y + x + 1 \quad ; 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.1$$

الحل

بتطبيق معادلات رانج – كوتا حيث

$$f(x,y) = -y + x + 1$$

ولدينا من الفرض أن x محصورة ضمن المجال $[0,1]$ أي أن :

أولا نأخذ عندما $n = 0$

$$k_1 = h\, f(x_n, y_n) = h\, f(x_0\,, y_0)$$

$$= 0.1(-y_0 + x_0 + 1) = 0.1(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$k_2 = h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}\,, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$= 0.1\, f\left(0 + 0.05\,, 1 + \frac{1}{2}(0)\right) = 0.1\, f(0.05\,,1) = 0.1(-1 + 0.05 + 1) = 0.005$$

$$k_3 = h\, f\left(x_n + \frac{h}{2}\,, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.1\, f(0.05\,, 1.0025) = 0.00475$$

$$k_4 = h\, f(x_n + h\,, y_i + k_3) = 0.1\, f(0.1\,, 1.00475) = 0.009525$$

نعوض في العلاقة (*)

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(\,k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.0048375$$

وبالتالي أوجدنا أن :

$$(x_0\,, y_0) \Longrightarrow (0,1)$$

$$(x_1\,, y_1) \Longrightarrow (0.1\,, 1.0048375)$$

وبنفس الطريقة نوجد ..... $y_2\,, y_3$

ملاحظة : في الامتحان الدكتورة تحدد عدد n

مثـــال

الحل الفعلي للمعادلة التفاضلية $y' = 3x + \frac{y}{2}$ هو

$$y = 13e^{x/2} - 6x - 12$$

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية

من أجل القيمة الابتدائية $y(0) = 1$ وبأخذ $h = 0.1$ على المجال $0 \leq x \leq 1$

الحل

بتطبيق معادلة رانج – كوتا حيث

$$f(x,y) = 3x + \frac{y}{2}$$

تصبح:

$$k_1 = h\,f(x_0\,,y_0) = h\,f(0,1) = 0.05$$

$$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}\,,y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$= 0.1\,f(0.05\,,1.025) = 0.06625$$

$$k_3 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}\,,y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$= 0.1\,f(0.05\,,1.033125) = 0.06665625$$

$$k_4 = h\,f(x_0 + h\,,y_0 + k_3)$$

$$= 0.1\,f(0.1\,,1.06665625) = 0.0833328$$

نعوض في المعادلة فنجد أن :

$$y_1 = 1.066524217$$

الطرائق ذات الخطوات المتعددة

تعريف طريقة الخطوات المتعددة لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x\,,y\,) \quad ;a \leq x \leq b \;\;,y(a) = \alpha$$

هي واحدة من معادلات الفروق التي تستخدم لإيجاد التقريب w_{i+1} عند نقطة الشبكة x_{i+1} والتي يمكن تمثيلها بالمعادلة التالية حيث m عدد صحيح أكبر من الواحد :

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h[b_m f(x_{i+1}\,,w_{i+1}) + b_{m-1}f(x_i,w_i) + \cdots + b_0\,f(x_{i+1-m}\,,w_{i+1-m})]$$

من أجل $i = m-1\,,m\,,\ldots.,N-1$

حيث $h = \frac{b-a}{N}$

$$w_0 = a \ , w_1 = a_1, \dots \dots, w_{m-1} = a_{m-1}$$

طريقة آدمز _ باشفورث

مرتبة ثانية	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \quad ; n = 1, \dots \dots$
مرتبة ثالثة	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \quad ; n = 2, \dots \dots$
مرتبة رابعة	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad ; n = 3, \dots \dots$

طريقة آدمز _ مولتون

$$y_{n+p} = y_{n+p-1} - h\, c_P \sum_{i=0}^{P-1} b_i\, f_{n+p-i}$$

p	c_P	b_0	b_1	b_2	b_3	
1	1	1				$y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1}$
2	$\frac{1}{2}$	1	1			$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}[f_{n+1} + f_{n+2}]$
3	$\frac{1}{12}$	5	8	-1		$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}[5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}]$
4	$\frac{1}{24}$	9	19	-5	1	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[9f_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}]$

تمرين : ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الأتية : $y' = x^2 - y$

$$h = 0.1 \quad y(0) = 1$$

١- أوجد $y_4 = y(0.4)$ باستخدام طريقة آدامس – باشفورث من المرتبة الرابعة و بالاستعانة بالقيم البتدائية

x_i	0	0.1	0.2	0.3

y_i	1	0.9052	0.8213	0.7492

٢-استخدام النتيجة من الطلب الأول في حساب y_4 باستخدام آدامس – مولتون مرتبة رابعة .

الحل

[1] إن صيغة أدامس –باشفورت من المرتبة الرابعة هي :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0] \dots\dots\dots\dots (*)$$

لدينا
$$y_3 = y(0.3) = 0.7492$$

نعوض في المعادلة ونوجد الـ f_i

$$f(x\,,y) = x^2 - y$$

$$f_0 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0^2 - 1 = -1$$

$$f_1 = f(x_1, y_1) = f(0.1\,,0.9052) = (0.1)^2 - 0.9052 = -0.8952$$

$$f_2 = f(x_2, y_2) = f(0.2\,,0.8213) = (0.2)^2 - 0.8213 = -0.7813$$

$$f_3 = f(x_3, y_3) = f(0.3\,,0.7492) = (0.3)^2 - 0.7492 = -0.6592$$

نعوض في $(*)$ فنجد

$$y_4 = 0.7492 + \frac{0.1}{24}[55(-0.6592) - 59(-0.7813) + 37(-0.8952) - 9(-1)]$$

$$\Longrightarrow y_4 = 0.689693$$

[2]نعلم أن صغية أدامس –مولتون من المرتبة الرابعة تعطى بالشكل :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1] \dots\dots\dots\dots (**)$$

لدينا y_3, f_1, f_2, f_3 من الطلب الأول بقي أن نقوم بحساب $f_4 = f(x_4, y_4)$

$$f_4 = f(x_4, y_4) = f(0.4\,,0.689693) = (0.4)^2 - 0.689693 = -0.529693$$

نقوم بالتعويض في $(**)$ فنجد

$$y_4 = 0.7492 + \frac{0.1}{24}[9(-0.529693) + 19(-0.6592) - 5(-0.7813) + (-0.8952)]$$
$$= 0.6897$$

سؤال امتحان لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$$y' = x + y \ , y(0) = 0 \ , h = 0.2$$

١- أوجد y_4 باستخدام طريقة آدامس – باشفوث مرتبة رابعة وبالاستعانة بطريقة رانج – كوتا من المرتبة الرابعة لإيجاد y_1 , y_2, y_3

٢- استخدام نتيجة من الطلب (١) لإيجاد y_4 باستخدام آدامس – مولتون من المرتبة الرابعة .

الحل :

[1]نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة رانج-كوتا من المرتبة الرابعة .

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث تعطى

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i) \qquad , \quad k_2 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\,, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\,, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \ , k_4 = h\,f(x_i + h\,, y_i + k_3)$$

كما أن
$$y' = f(x,y) = x + y$$

نوجد y_1 , y_2, y_3
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

-في الامتحان غالبا قيمة y_1 , y_2, y_3 تكون معطاة

$$k_1 = h\,f(x_0, y_0) = (0.2) \quad , \quad f(0,0) = 0$$

$$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}\,, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f(0.1\,,0) = (0.2)(0.1 + 0) = 0.02$$

$$k_3 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}\,, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f(0.1\,,0.01) = (0.2)(0.1 + 0.01) = (0.2)(0.11)$$
$$= 0.022$$

$$k_4 = h\,f(x_0 + h\,, y_0 + k_3) = (0.2)f(0.2\,, 0.022) = 0.0444$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.02) + 2(0.022) + 0.0444) = 0.0214$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\,f(x_1, y_1) = (0.2)f(0.2\,, 0.0214) = (0.2)(0.2 + 0.0214) = 0.04428$$

$$k_2 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}\,, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f\left(0.3\,, 0.0214 + \frac{0.04428}{2}\right) = (0.2)f(0.3\,, 0.04354)$$

$$= (0.2)(0.3 + 0.04354) = 0.068708$$

$$k_3 = h\,f\left(x_1 + \frac{h}{2}\,, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f\left(0.3\,, 0.0214 + \frac{0.068708}{2}\right)$$
$$= (0.2)f(0.3\,, 0.055754) = (0.2)(0.3 + 0.055754) = 0.0711508$$

$$k_4 = h\,f(x_1 + h\,, y_1 + k_3) = (0.2)f(0.4\,, 0.0214 + 0.0711508) = (0.2)f(0.4\,, 0.092551)$$
$$= (0.2)(0.4 + 0.092551) = 0.098510$$

$$y_2 = 0.0214 + \frac{1}{6}(0.04428 + 2(0.068708) + 2(0.0711508) + 0.098519) = 0.091818$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\,f(x_2, y_2) = (0.2)f(0.4\,, 0.091818) = (0.2)(0.4 + 0.091818) = 0.098364$$

$$k_2 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.2)f\left(0.5\,, 0.091818 + \frac{0.098364}{2}\right) = (0.2)f(0.5\,, 0.141)$$

$$= (0.2)(0.5 + 0.141) = 0.1282$$

$$k_3 = h\,f\left(x_2 + \frac{h}{2}\,, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = (0.2)f\left(0.5\,, 0.091818 + \frac{0.1282}{2}\right)$$
$$= (0.2)f(0.5\,, 0.155918) = (0.2)(0.5 + 0.155918) = 0.1311836$$

$$k_4 = h\,f(x_2 + h\,, y_2 + k_3) = (0.2)f(0.6\,, 0.091818 + 0.1311836)$$
$$= (0.2)f(0.6\,, 0.223002) = (0.2)(0.6 + 0.223002) = 0.1646004$$

$$y_3 = 0.091818 + \frac{1}{6}(0.098364 + 2(0.1282) + 2(0.1311836) + 0.1646004) = 0.222107$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0]$$

$$f_3 = f(x_3, y_3) = f(0.6\,, 0.222107) = 0.6 + 0.222107 = 0.822107$$

$$f_2 = f(x_2, y_2) = f(0.4\,, 0.091818) = 0.4 + 0.091818 = 0.491818$$

$$f_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2\,, 0.0214) = 0.2 + 0.0214 = 0.2214$$

$$f_0 = f(x_0, y_0) = f(0\,,0) = 0$$

$$y_4 = 0.222107 + \frac{0.2}{24}[55(0.822107) - 59(0.491818) + 37(0.2214) - 9(0)] = 0.425301$$

[2]نعلم أن صغية أدامس –مولتون من المرتبة الرابعة تعطى بالشكل :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1]$$

لدينا y_3, f_1, f_2, f_3 من الطلب الأول بقي أن نقوم بحساب $f_4 = f(x_4, y_4)$

$$f_4 = f(\,x_4, y_4) = f(0.8\,, 0.425361) = 0.8 + 0.4253661 = 1.225361$$

نعوض فنجد

$$y_4 = 0.222107 + \frac{0.2}{24}[9(1.225361) + 19(0.822107) - 5(0.491818) + 0.2214] = 0.425529$$

مسألة لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $y' = y - x^2 + 1$ حيث $h = 0.5$ و $y_0 = 0.5$ فإذا علمت أن الحل الفعلي هو :

$$y = (x+1)^2 - 0.5e^x$$

١- أوجد y_4 باستخدام طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة بالاستعانة بالحل الفعلي لإيجاد القيم y_1, y_2, y_3

٢- أوجد y_4 باستخدام ريقة أدمز مولتون من المرتبة الرابعة والإستفادة من الطب الأول

الحل: أولاً لنوجد القيم y_1, y_2, y_3 من الحل الفعلي ، مع الانتباه أن $x_i = i.h = i(0.5)$

$$y_1 = (x_1+1)^2 - 0.5e^{x_1} \Longrightarrow y_1 = 1.425639$$

$$y_2 = (x_2+1)^2 - 0.5e^{x_2} \Longrightarrow y_2 = 2.640859$$

$$y_3 = (x_3+1)^2 - 0.5e^{x_3} \Longrightarrow y_3 = 4.009155$$

نعلم أن صيغة رانج كوتا من المرتبة الرابعة

$$y_{i+1} = y_{i1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h.f(x_i, y_i) \quad , k_2 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h.f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \quad , \quad k_4 = h.f(x_i + h \ , y_i + k_3)$$

نوجد y_4 نعوض في العلاقة من أجل $i = 0$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

نوجد k_1, k_2, k_3, k_4

$$k_1 = h(y_3 - x_3^2 + 1) \Rightarrow k_1 = 1.379577$$

$$k_2 = h\left(y_3 + \frac{k_1}{2} - \left(x_3 + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right) \Rightarrow k_2 = 1.318221$$

$$k_3 = h\left(y_3 + \frac{k_2}{2} - \left(x_3 + \frac{h}{2}\right)^2 + 1\right) \Rightarrow k_3 = 1.302882$$

$$k_4 = h(y_3 + k_3 - (x_3 + h)^2 + 1) \Rightarrow k_4 = 1.156018$$

نعوض الآن في صيغة رانج – كوتا فنجد :

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(1.37957 + 2(1.3118221) + 2(1.302882) + 1.156018)$$

$$y_4 = 5.305455$$

٢) نعلم أن صيغة آدمر- مولتون من المرتبة الرابعة هي :

$$y_{i+4} = y_{i+3} + \frac{h}{24}[9f(x_{i+4}, y_{i+4}) + 19f(x_{i+3}, y_{i+3}) + 5f(x_{i+2}, y_{i+2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

ومن أجل إيجاد y_4 نضع $i = 0$ في العلاقة السابقة فتصبح :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[9f(x_4, y_4) + 19f(x_3, y_3) + 5f(x_2, y_2) + f(x_1, y_1)]$$

لدينا من الحل الفعلي والعلاقة $x_i = i \ , h = i(0.5)$ مايلي :

$$\begin{cases} x_1 = 0.5 \ , \ y = 1.425639 \\ x_2 = 1 \ , \ y = 2.640859 \\ x_3 = 1.5 \ , \ y = 4.009155 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

ومن الطلب الأول لدينا : $y_4 = 5.305455$

ومنه :

$$f(x_1,y_1) = y_1 - x_1^2 + 1 = 2.175639$$

$$f(x_2,y_2) = y_2 - x_2^2 + 1 = 2.640859$$

$$f(x_3,y_3) = y_3 - x_3^2 + 1 = 2.759155$$

$$f(x_4,y_4) = y_4 - x_4^2 + 1 = 2.305455$$

وبالتعويض نجد أن :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[(92.305455) + 19(2.759155) + 5(2.640859) + 2.175639]$$

انتهت المحاضرة

إلى هنا أصدقائي نكون قد أنهينا مقرر التحليل العددي ٢ آملين أن نكون قد وفقنا في كتابة هذا المقرر و نعتذر عن ورود بعض الأخطاء إن وجدت

كما نرجو منكم الاطلاع على الدورات القديمة للمقرر لمعرفة طريقة النموذج الامتحاني

إعداد: لبنى طون –شهناز طاطيش–عبد الرحمن البحش