16-9-2018

نظري

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: مفاهيم أساسية في التحليل العددي

- لقد نوهت الدكتورة في بداية المحاضرة إلى أهمية الالتزام بالحضور في نفس الزمرة.
- بالإضافة إلى ضرورة وجود الكتاب للدكتورة رشا بعاج و برلنت مطاط.
- وكذلك ضرورة وجود آلة حاسبة علمية كونها أساس دراسة مقرر التحليل العددي (١) و (٢).
- يجب على الطالب تعلم كيفية استخدام الآلة الحاسبة.

**ملاحظة** : في الامتحان عند تقريب الأعداد ( لا يسمح بتدوير الأعداد ذات المنازل العشرية إلى أقل من خمسة منازل عشرية).

**مثال**: ( 0.943 - موفوض) بينما ( 0.94352 - مقبول )

**محتوى المقرر:**

- مفاهيم أساسية في التحليل العددي.
- حل المعادلات غير الخطية.
- الاستيفاء بكثيرات الحدود.
- التفاضل و التكامل العددي .(تفاضل – تكامل)

- كل بحث من البحوث السابقة له عدة طرائق للحل لذلك يجب دراسة الطرق كاملة حيث تحدد طريقة حل السؤال في ورقة الامتحان ويجب الالتزام بها...

**لنبدأ الآن محاضرتنا:**

**تعريف التحليل العددي:** هو بناء خوارزمية عددية لحل مسألة رياضية معرفة ومستمرة .

**ملاحظة**: يجب وضع الآلة الحاسبة على التقدير الستيني راديان $(Rad)$

- في الآلة الحاسبة $((CASIO\ fx-99\ IES\ PLUS))$ يكون ذلك بالضغط على الزر $shift$ وبعده $Mode$ واختيار الخيار الرابع $Rad$ بالضغط على 4 فيحسب العدد بالراديان.

- لحل مسألة ما نتساءل أولاً فيما إذا كان بإمكاني استخدام التحليل العددي لحل هذه المسألة أم لا ؟

مسألة

لنسأل هل إمكانية الحل موجودة؟

نعم

(وذلك إذا تم الإثبات عن طريق مبرهنة أن هناك حل)

**مثال**: $\int_{2}^{-3} e^{x}\,dx$

التمرين قابل للحل ومنه يمكن للتحليل العددي إيجاد الحل.

لا

( وذلك إذا تم إثبات أنه لا يوجد إمكانية لإيجاد الحل ).

**مثال:** $\int_{-3}^{3} \ln x\,dx$

التمرين غير قابل للحل ومنه لا يمكن للتحليل العددي إيجاد الحل.

- ومنه إذا كان الجواب نعم وكان يوجد إمكانية للحل نطرح سؤال جديد:

هل الطرائق التحليلية موجودة؟؟

نعم

وذلك إذا أعطاني الحل بالطريقة التحليلية ونسميه الحل الصحيح أو الحل الفعلي رمزه $T$

لا

وذلك إذا أعطاني الحل بالطريقة العددية ونسميه الحل التقريبي ونرمز له ب $Q$

**ملاحظة**: - التحليل العددي يختلف عن الحل التحليلي.

- التحليل العددي يعني بناء خوارزمية.

- **ما هو معيار نجاح الخوارزمية العددية :**

a) إذا كان الحل الفعلي موجود يكون : $E_{exact} = |T - Q|$ الخطأ الفعلي

- الخطأ الفعلي دائما موجب لوجود القيمة المطلقة ويمنع حسابه كقيمة سالبة .

ماذا سنفعل بالمقدار السابق أي بالخطأ الفعلي ؟

سنرى إذا كان الخطأ الفعلي :

صغير

فالخوارزمية مقبولة (نقول عنها ناجحة)

كبير

سنحسب المقدار $R_{exact} = \left|\frac{E_{exact}}{T}\right|$

يدعى(الخطأ النسبي)

بعدها سنرى إذا كان الخطأ النسبي :

صغير

مقبول (المتراجحة ناجحة)

كبير

غير مقبول (المتراجحة غير ناجحة)

إذا لم يكن للمسألة حل تحليلي بالتالي لا يمكن حساب الخطأ الفعلي ويوجد بديل .

a) إذا كان الحل التحليلي غير موجود : فإننا نقوم بحساب الخطأ الأعظمي $E_{max}$

**ملاحظة**: كل طريقة عددية لها قانون لحساب الخطأ الأعظمي

## ميزات الخطأ الأعظمي :

١. يتعلق بالحل الفعلي $T$ (بعض المسائل يكون الحل التحليلي فيها موجود ولكن نحن نريد الحل العددي فوجود $T$ وعدمه واحد ).
٢. $E_{max} \geq E_{exact}$ ( وذلك إذا كان الخطأ الفعلي محسوب وموجود فالمتراجحة محققة).
٣. يحسب الخطأ الأعظمي من المبرهنات والنظريات.
٤. يوصف بأنه بخيل (يقصد بأنه يجب أن يكون أصغر ما يمكن لأن الهدف من التحليل العددي تقليل الخطأ أقل ما يمكن).

**ملاحظة**: كل طريقة عددية (خوارزمية عددية ) لا تقبل دون تحديد مقدار خطأها الأعظمي .اتفق العلماء على أنه قد لا تتساوى المقادير لكن مقاليبها تكون متقاربة .

أي : $Q \neq T$ لكن $\frac{1}{Q} \cong \frac{1}{T}$

**مثال**: $\frac{1}{19} \cong \frac{1}{20}$ ولكن $20 \neq 19$ وبذلك $T = 19$ $Q = 20$

لو حسبنا الخطأ الأعظمي $E_{max}$ نرى إذا كان :

صغير — كبير

مقبول (الخوارزمية ناجحة) — عندها نحسب المقدار $R_{max} = \left|\frac{E_{max}}{Q}\right|$

( يدعى خطأ نسبي أعظمي )

إذا كان $R_{max}$

صغير — كبير

مقبول (الخوارزمية ناجحة) — غير مقبول (الخوارزمية غير ناجحة)

**بعض أنواع الأخطاء المرتكبة:** سندرس ثلاثة أنواع:

١. الأخطاء الناتجة عن تدوير الأرقام.
٢. الأخطاء الناتجة عن اقتطاع السلاسل غير المنتهية.
٣. الأخطاء الناتجة عن التوابع (الدوال) و استقراريتها.

**النوع الأول:** ما هي أخطاء التدوير (تدوير الأرقام):

**أولاً:** لنميز بين العدد $number$ والرقم $digit$

(عدد 35172) بينما ( من 1 حتى 9 هي أرقام)

**مثال:** العدد $T = \pi = 3.1415926$

- لا يمكن استخدام هذا العدد دون أن نجري عليه التدوير (ال يمكن الاقتطاع دون التدوير)
- **التدوير:** هو عملية اقتطاع لجزء من العدد مع تقدير هل سيتم زيادة هذا العدد أم لا؟؟

(**كيفية التدوير** : نأخذ رقم المنزلة المطلوب الاقتطاع بالنسبة لها وننظر للرقم الذي يليها إذا كان

(الرقم $\geq 5$ ) نضيف واحد أما إذا كان( الرقم $< 4$) لا نضيف شيئا بينما إذا كان (الرقم =4) ننظر إلى الرقم الذي يلي الرقم 4 ونكمل على نفس الترتيب.....)

إذا نرمز للقيمة التي تظهر بعد التدوير ب $Q = 3.14159$

- سنأخذ مثال حيث أن هذا المثال ليس له طلبات وإنما هو تدريب لإخراج:
- $Rmax \quad Emax \quad Exact$
- **السؤال:** اقتطع العدد$T = 2{,}34611$ بالنسبة لمنزلتين عشريتين ثم احسب الخطأ المرتكب نتيجة هذا التدوير

**الحل:**

- عندما نقتطع نحصل على Q
- طريقة الاقتطاع: نأخذ ثلاث منازل بعد الفاصلة وننظر إلى الرقم الثالث $\geq 5$ نضيف 1:
- $Q = 2{,}35 \Leftarrow T = 2{,}34611$
- عندما نقتطع سينتج خطأ لذلك سوف نحسب الخطأ المطلق $Exact$
- $Exact = |T - Q| = |2.34611 - 2{,}35| = 0{,}00389$
- $Exact$ كبير $\Leftarrow$ نحسب الخطأ النسبي
- $Rexact = \left|\dfrac{Eexact}{T}\right| = \left|\dfrac{0{,}00389}{2{,}34611}\right|$

- $Rexact = 1.658063774 \times 10^{-3}$
- أصبح الرقم $Q = 2,35$ المدور حيث أخذناه ووضعناه في سؤال الآتي:
- **تمرين:** لدينا المعادلة التفاضلية التالية علماً أن الأرقام مدورة
- $2,35y'' + 6y + 11 = 0$

**نظرية :** الخطأ الأعظمي المرتكب في التدوير الأرقام العشرية هو

$$Emax = 0,5 \times 10^{-n}$$

حيث $n$ هي عدد المنازل العشرية التي تم تدوير الأرقام لها

$$Emax = 0,5 \times 10^{-2} = 0,005$$

$$Rmax = \left|\frac{Emax}{Q}\right| \qquad Rmax = \left|\frac{0,005}{2,35}\right|$$

$$Rmax = 2.1276596 \times 10^{-3}$$

لو فرضنا من المثال السابق أن $T = 2,34611$

نلاحظ ان $Eexact < Emax$

$$0,00389 < 0,005$$

**انتهت المحاضرة**

إعداد: دعاء الرحيل ♥ مرح غريب ♥ ماريا عيد

تنسيق: ولاء الأخضر ♥