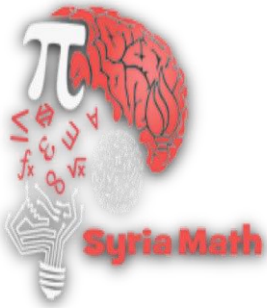

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: الثالثة

◄ عنوان المحاضرة: الأخطاء الناتجة عن الدوال واستقرارها

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

نتابع بالمفاهيم الأساسية للتحليل العددي.

أمثلة.

النوع الثالث : الأخطاء الناتجة عن الدوال واستقرارها :

عندما تم استخدام الحواسيب للقيام بالعمليات الحسابية ظهر هذا النوع من الأخطاء لأن الحواسيب تقوم بعملية الاقتطاع والتدوير أو تقوم بالاقتطاع فقط (حسب برمجة الحاسوب)

ونتيجة لذلك ظهر هذا الخطأ في الدوال والسبب الرئيسي يعود لوجود عملية الطرح في المقام واحتمال ظهور الصفر في المقام .

مثال : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ $D_f: \frac{R}{\{2\}}$

هذا التابع يعاني من عدم استقرار بجوار $\sqrt{2}$ للتخلص من هذه المشكلة :

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام ..... $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

الدالة مريضة عند 2 لان 2 تعدم المقام

إشكالية هذه الدالة تكمن بأن الدالة تحوي عملية طرح في المقام فإذا كانت x قريبة من العدد 2 فهذا يؤدي إلى وجود الصفر بالمقام وبالتالي تكون الدالة غير مستقرة لنتخلص من هذه المشكلة قمنا بضرب البسط

والمقام بمرافق المقام بعد إجراء الإصلاحات توصلنا إلى أن القيمة الوحيدة التي تسبب عدم الاستقرار هي 2 (**تفسير : قد يتساءل البعض أنه في كلا الخطوتين يوجد طرح في المقام فلماذا اعتبرنا الحالة الأولى تعاني عدم استقرار في جوار ال 2..... أما الثانية فقط عند ال 2!!!**

وذلك لان القيم التي تجعل $\sqrt{x}$ قريبة جداً من $\sqrt{2}$ هي أكثر من القيم التي تجعل x قريبة جداً من 2)

سؤال :

- كيف يمكن أن نعرف أن الدالة مريضة ؟؟
ندرس $R(f)$ إذا كانت قيمة صغيرة فنقول أن التابع حالته جيدة أما إذا كانت قيمته كبيرة عندها يكون مريض .
- كيف نحدد قيمته ؟؟ عن طريق العدد الشرطي $R(f) = |\frac{E(f)}{T}|$ (الخطأ النسبي للدالة)

$$E(f) = \Delta f = f(x).\Delta x \quad \text{لأن} \quad f' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \Delta f = f'.\Delta x$$

حيث $T = f(x)$.

نضرب ونقسم على x فنحصل على

$$R(f) = \left|\frac{f'(x).\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x).\Delta x}{f(x)}\right| . \left|\frac{x}{x}\right| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)} . \frac{\Delta x}{x}\right|$$

حيث $\frac{\Delta x}{x}$ هو التغيير النسبي ل x أي :

$$\Rightarrow R(f) = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| . |R(x)| \longrightarrow x \text{ الخطأ النسبي ل}$$

وكوننا ندرس تحليل عددي فالتغيرات تكون صغيرة فلذلك $R_{(x)}$ هو صغير جداً جداً وبذلك يكون المعيار الذي يحدد لنا إن كانت $R_{(f)}$ كبيرة أم صغيرة هو $\left|\frac{f'}{f}x\right|$ وهو **العدد الشرطي** وبالتالي إن العدد الشرطي هو الذي سيخبرنا بأن التابع مريض أم لا.

Syria Math Team

ملاحظات حول العدد الشرطي:

١) إذا كان العدد الشرطي كبير عندئذٍ تكون الدالة f مريضة ويجب معالجتها بأحد الأساليب الرياضية المعروفة (على سبيل المثال استخدام المرافق-إخراج عامل مشترك)

٢) إذا كان العدد الشرطي صغير عندئذٍ تكون الدالة جيدة

٣) في حالة الحدوديات من الدرجة الثانية عادة يتم معالجة الدالة مباشرةً دون اختبار حالتها

٤) إذا كان العدد الشرطي يقع بين الصفر والواحد او يساوي الواحد (يعتبر عدداً صغيراً) عندئذٍ نقول أن الدالة جيدة وخلاف ذلك هي مريضة

٥) تكون الدالة مريضة من أجل قيمة معينة للمتغير (بتعطينا ال x) والعدد الشرطي يمثل قيمة محددة للمتغير .

مثال: أوجد العدد الشرطي للدالة $F(x)=\sqrt{x}$ اوجد العدد الشرطي لها وماذا تستنتج ؟

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'}{f}x\right| = \left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}x\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}x\right| = \frac{1}{2}$$

حيث أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذاً f جيدة دوماً وليست مريضة.

سؤال دورة (2015 -2016):

أوجد العدد الشرطي للدالة $f(x)=e^x$

من أجل هذه القيمة $x=1$. ، $x=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=e^x$$

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'}{f}x\right| = \left|\frac{e^x}{e^x}x\right| = x$$

من اجل $x=10$ إذا" العدد الشرطي $=10$

$f(x)$ مريضة لان $n = 10 > 1$

من أجل $x = \frac{1}{2}$

$$\text{العدد الشرطي} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{e^n x}{e^x}\right| = x$$

$$\text{العدد الشرطي} = \frac{1}{2} < 1$$

نلاحظ أن الدالة جيدة عند ال $x = \frac{1}{2}$

انتهت المحاضرة

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عيد

تنسيق: ولاء الأخضر♥

Syria Math Team