نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: نظرية المجموعات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذا الفصل :

نظرية المجموعات ،ونظرية الزمر.

سنبدأ بنظرية المجموعات:

المجموعات

تعريف المجموعة :

هي كمية (أسرة) من العناصر تشترك فيما بينها بخاصة معينة أو تجمعها صفة مشتركة حيث تمكننا هذه الصفة من الحكم على عنصر ما فيما اذا كان ينتمي الى هذه المجموعة ام لا.

نرمز للمجموعة بالأحرف الكبيرة $A, B, C, \dots \dots$ أما عناصرها بالأحرف الصغيرة $a, b, c, \dots$.

تعريف الجداء الديكارتي :

لتكن A, B مجموعات غير خالية نسمي المجموعة المؤلفة من ثنائيات بالشكل :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A , b \in B\}$$

بالجداء الديكارتي للمجموعتين A, B.

ملاحظة : $A \times B \neq B \times A$ أي أن الجداء الديكارتي غير تبديلي .

تعريف العلاقة: نسمي كل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة من A إلى B ونرمز لها ب $\mathcal{P}$ بالشكل : $\mathcal{P} : A \longrightarrow B$

تعريف العلاقات الثنائية : عندما $A = B$ لتكن P مجموعة غير خالية نسمي كل مجموعة جزئية في الجداء الديكارتي $P \times P$.

علاقة ثنائية على P ويرمز لها $(\mathcal{P})$.

إذا كانت $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية على المجموعة P وكان $(a,b) \epsilon \mathcal{P}$ فإننا نقول إن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة $\mathcal{P}$

وتكتب : $a\mathcal{P}b$ أي أنه $\forall (a,b) \epsilon \mathcal{P}$ فإن :

$$(a,b) \epsilon \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}b$$

أمثلة:

١) مثال على العلاقة : ليكن لدينا :

$A = \{x,y\}$ $B = \{a,b,c\}$ الجداء الديكارتي $A \times B$ بالشكل :

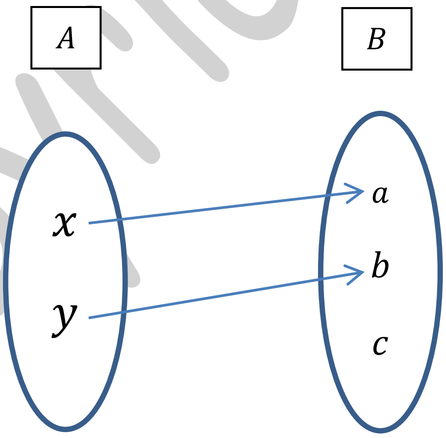
$$\boldsymbol{A \times B = \{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}}$$

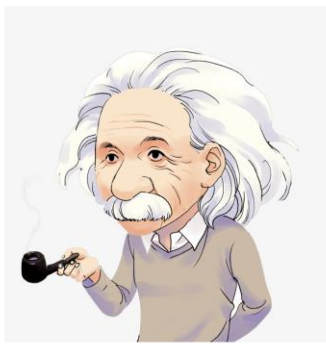
و $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ علاقة بالشكل :

$$\boldsymbol{\mathcal{P} = \{(x,a),(y,b)\}}$$

حيث نقول عن $\mathcal{P}$ علاقة من A الى B بالشكل $\boldsymbol{\mathcal{P}}: A \to B$

لان $\mathcal{P} \subseteq A \times B$





٢) مثال على العلاقة الثنائية :

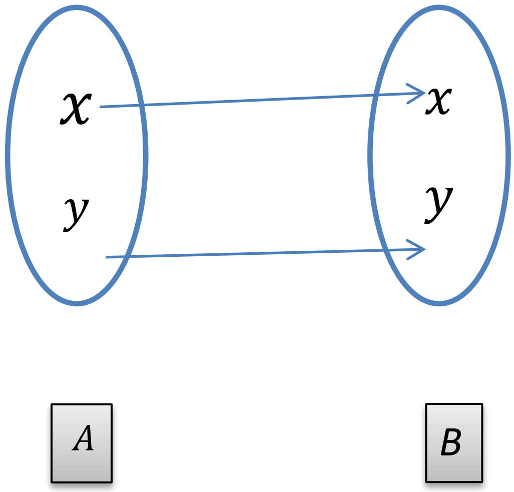
ليكن لدينا $A = \{x,y\}, B = \{x,y\}$

الجداء الديكارتي $A \times B$ بالشكل :

$$A \times B = \{(x\,,x),(x\,,y),(y,x),(y,y)\}$$

و $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية بالشكل :

$$\mathcal{P} = \{(x,x),(y,y)\}$$



هنا نقول عن $\mathcal{P}$ أنها علاقة ثنائية من A إلى B بالشكل $\mathcal{P}: A \to B$ لأن $\mathcal{P} \subseteq A \times B$
و $A = B$.

ملاحظات :

١- **تعريف المجموعة الجزئية** : نقول عن A مجموعة جزئية من B اذا كان كل عنصر من A موجود في B

٢- نقول ان $A=B$ اذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

تعاريف : لتكن $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية على المجموعة غير الخالية P :

١) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها قطرية إذا كانت $\mathcal{P} = P \times P$

٢) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها انعكاسية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a \in P\,;(a,a) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a\mathcal{P}a$$

ونقصد بالانعكاسية أن كل عنصر من المجموعة P مرتبط مع نفسه وفق $\mathcal{P}$ ..

٣) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تناظرية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b \in P\,;(a,b) \in \mathcal{P} \Longrightarrow (b,a) \in \mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b \in P; a\mathcal{P}b \Longrightarrow b\mathcal{P}a$$

٤) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها تخالفية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b\,\epsilon P:\begin{cases}(a,b)\epsilon\mathcal{P}\\(b,a)\epsilon\mathcal{P}\end{cases}\Rightarrow a=b$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b\,\epsilon P:\ \underbrace{a\mathcal{P}b\ \wedge b\mathcal{P}a}_{\text{الفرض}}\Rightarrow\underbrace{a=b}_{\text{الطلب}}$$

أي أن $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ تكون تخالفية إذا تحققا الفرض والطلب معا أو لم يتحقق الفرض نهائيا ونقول أنها ليست تخالفية إذا وفقط إذا تحقق الفرض ولم يتحقق الطلب ..

٥) نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها متعدية إذا تحقق الشرط:

$$\forall a,b,c\,\epsilon P:\begin{cases}(a,b)\epsilon\mathcal{P}\\(b,c)\epsilon\mathcal{P}\end{cases}\Rightarrow(a,c)\epsilon\mathcal{P}$$

أو تكتب بشكل اخر :

$$\forall a,b,c\,\epsilon P:\ \underbrace{a\mathcal{P}b\ \wedge b\mathcal{P}c}_{\text{فرض}}\Rightarrow\underbrace{a\mathcal{P}c}_{\text{طلب}}$$

والمتعدية نقصد بها إذا كان الأول مرتبط بالثاني والثاني مرتبط بالثالث فإن الأول مرتبط بالثالث أيضا ..

ملاحظة : العلاقة $a\mathcal{P}b$ تقرأ من اليمين إلى اليسار والعكس غير صحيح حيث b مرتبط مع a .

مثال: لتكن $P=\{a,b,c,d\}$ مجموعة

- لنأخذ العلاقة: $\boldsymbol{\mathcal{P}}=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,a)\}$

١- هل هي انعكاسية ؟؟

العلاقة $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ليست انعكاسية لان: $(b,b)\notin\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $b\in P$ ولكن

٢- هل هي تناظرية ؟؟

العلاقة $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ليست تناظرية لان $(a,b)\,\epsilon\,\boldsymbol{\mathcal{P}}$ ولكن $(b,a)\notin\boldsymbol{\mathcal{P}}$

٣- هل هي تخالفية ؟؟

نعم لأن جميع عناصرها حققت الشرط التالي :

$$\forall a,b \in P :\ \underbrace{a\mathcal{P}b\ \wedge b\mathcal{P}a}_{\text{الفرض}} \Rightarrow \underbrace{a=b}_{\text{الطلب}}$$

حيث أن العنصر الأول من $\mathcal{P}$ والذي هو (a,b) لم يحقق الفرض أصلا فهو يحقق شرط التخالفية ، كذلك العنصر (a,c) لم يحقق الفرض من الشرط فهو يحقق شرط التخالفية والعنصر الثالث من $\mathcal{P}$ والذي هو (a,d) ايضا لم يحقق الفرض فهو يحقق شرط التخالفية ، أما العنصر الرابع من $\mathcal{P}$ والذي هو (a,a) يحقق كلا من الفرض والطلب في الشرط وبالتالي هو أيضا يحقق شرط التخالفية بالشكل:

$$\begin{cases}(a,a)\in \mathcal{P}\\(a,a)\in \mathcal{P}\end{cases} \quad , \quad a=a \Leftarrow$$

وبالتالي فإن $\mathcal{P}$تخالفية حيث جميع عناصرها تحقق الشرط .

٤- هل هي متعدية ؟؟

نعم متعدية لأن جميع عناصر $\mathcal{P}$ تحقق شرط المتعدية كالتالي :

(a,b)لا يحقق الفرض (a,b) ⟸يحقق شرط المتعدية

و (a,c) لا يحقق الفرض لأنه لا يوجد في $\mathcal{P}$ ثنائية مسقطها الأول c بالشكل $(c,\ )$ ومنه $(a\,,c)$ ⟸ تحقق شرط المتعدية تلقائيا

و (a,d)لا يحقق الفرض(a,d) ⟸*يحقق شرط المتعدية لأن* الفرض لم يتحقق .. أما (a,a) إذا أخذناها مع أي ثنائية سابقة فهي تحقق الفرض والطلب معا فيكون شرط المتعدية عندها محقق كالتالي :

$$\begin{cases}(a,a)\in \mathcal{P}\\(a,b)\in \mathcal{P}\end{cases} \Leftarrow (a,b)\in \mathcal{P}$$

وبالتالي $\mathcal{P}$ متعدية ..

- ومنه نستنتج أنه في جميع العلاقات السابقة (متعدية .. تخالفية .. ....) إذا لم يتحقق الفرض الذي ضمن الشرط فالعلاقة محققة تلقائيا سواء تحقق الطلب ام لا ..
- وإذا تحقق الفرض والطلب معا أيضا تكون العلاقة محققة

إلا إذا كان الفرض محقق والطلب غير محقق عندها فقط تكون العلاقة غير محققة.

مثال آخر:

لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ ولتكن :

$$\mathcal{P}=\{\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$$

١) العلاقة $\mathcal{P}$ انعكاسية.(لأنها من اجل $(\forall a\in A \Rightarrow (a,a)\in \mathcal{P})$

٢) العلاقة $\mathcal{P}$ تناظرية لأن $(1,2)\in \mathcal{P}$ وأيضا : $(2,1)\in \mathcal{P}$

و $(4,4)$, $(3,3)$, $(2,2)$, $(1,1)$ لم تحقق الفرض أصلا في شرط التناظرية فهي تحقق شرط التناظرية ومنه $\mathcal{P}$ تناظرية ..

٣) العلاقة $\mathcal{P}$ ليست تخالفية لان

$$(1,2) \in \mathcal{P} \text{ و } (2,1) \in \mathcal{P}$$

لكن $2 \neq 1$ فهي ليست تخالفية لأن ليست جميع عناصرها تحقق الشرط أو لأنها تحقق الشرط الجدلي $\forall(a,b),(b,a) \in \mathcal{P} \implies a \neq b$ وهو الشرط الدال على أن العلاقة ليست تخالفية حيث $2 \neq 1$ لكن : $(1,1) \wedge (1,2) \in \mathcal{P}$

٤) العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية لان: $(1,2) \wedge (2,2) \in \mathcal{P} \implies (1,2) \in \mathcal{P}$

$$(2,1) \wedge (1,1) \in \mathcal{P} \implies (2,1) \in \mathcal{P}$$

وباقي العناصر لا تحقق الفرض فهي تحقق الشرط ومنه : $\mathcal{P}$ متعدية.

تعريف علاقة التكافؤ : لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة ثنائية معرفة على P

نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ إنها علاقة تكافؤ على P إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

تعريف: نقول أن $\mathcal{P}$ علاقة ترتيب على P إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية (نرمز لعلاقة الترتيب بالشكل $\leq$)

ملاحظات :

١) لا توجد مجموعة غير خالية لا تتحقق فيها إحدى العلاقتين (التكافؤ أو الترتيب) على الأقل ..

٢) ليست كل المجموعات يمكن أن نعرف عليها علاقة التكافؤ ..

٣) كل المجموعات يمكن أن نعرف عليها علاقة ترتيب ..

س١ : ما معنى $A = B$ ؟؟ معناها يوجد علاقة تخالفية $\mathcal{P}$ تحقق: $a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a$

س٢ : متى يتساوى عنصريين؟؟ إذا كان كل منهما أكبر أو يساوي الآخر أي إذا كان $a < b$ و $b < a$

((حيث $<$ رمز لعلاقة ترتيب)) ..

تعريف :

لتكن $\mathcal{P}$علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية P .. وليكن $a \in \mathcal{P}$ (وطالما $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ فهي انعكاسية وتناظرية ومتعدية).

$a \in \mathcal{P}$عندئذ نسمي المجموعة$\emptyset \neq \overline{a} = \{x : x \in P , a\mathcal{P}x\}$ بصف التكافؤ المولد بالعنصر a وهي مجموعة جزئية في P

حيث هذه المجموعة غير خالية لأنها تحوي على الأقل a أي: $a \in \overline{a}$ (بما أنها انعكاسية فحتما aمرتبط مع نفسه فهو ينتمي لـ $\overline{a}$)

ونسمي مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ بمجموعة الخارج و نرمز لها بـ $P/_{\mathcal{P}}$ بالشكل :

$$P/_{\mathcal{P}} = \{\overline{a} \ : a \in P\}$$

مثال:

لتكن $P = \{a, b, c\}$ ولتكن :

$$\mathcal{P} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

$\mathcal{P}$علاقة تكافؤ علىP وذلك لأنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية .

صف تكافؤ a : $\overline{a} = \{a, b\}$

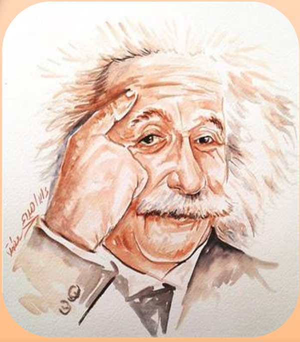
صف تكافؤ b : $\overline{b} = \{b, a\}$

صف تكافؤ c : $\overline{c} = \{c\}$

(أي العناصر المرتبطة بهذا العنصر)

ومنه : $P/_{\mathcal{P}} = \{\overline{a} , \overline{b} , \overline{c}\}$

وطالما أن $\overline{b} = \overline{a}$ فإن : $P/_{\mathcal{P}} = \{\overline{a} , \overline{c}\}$



انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر