نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الأولى ◄ عنوان المحاضرة: المتسلسلات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

قام الدكتور في بداية المحاضرة بالتعريف بهذا المقرر حيث نوه إلى الارتباط في هذا المقرر بمقرر التحليل ١ والذي درسناه في العام السابق ومن ثم نتوسع في مفاهيم جديدة كسلاسل الجداءات الحقيقية اللانهائية ومتتاليات التوابع الحقيقية وبعدها سندرس بعض التكاملات الخاصة وهي عبارة عن مكاملة بعض التوابع والتي لا تملك تابعاً أصلياً ولنبدأ محاضرتنا الآن . ^_^

المتسلسلات اللانهائية

المتتالية : المتتالية اللانهائية $\{a_n\}$ حدودها $n \in N$

حيث a_n الحد العام $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

المتسلسلة :

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة .

متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ حدودها

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$ .... $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ونقول أنها متقاربة إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R \quad : \quad S \neq \pm\infty$$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

نشكل المجموع :

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

متتالية المجاميع الجزئية متقاربة وبالتالي المتسلسلة متقاربة .

المتتالية الهندسية :

نأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

نجد أن متتالية المجاميع الجزئية

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

المجموع :

$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$= \begin{cases} a\dfrac{1}{1-r} & |r| < 1 \quad \text{متقاربة} \\ \text{متباعدة} & r > 1 \end{cases}$$

خواص المتسلسلات المتقاربة :

مبرهنة :

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن حدها العام يسعى للصفر

بحيث s قيمة عددية $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

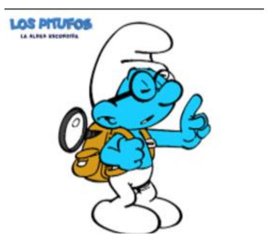
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n = s - s = 0$$

عكس المبرهنة ليس صحيح



مثال : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

هي متسلسلة ريمانية متباعدة وحدها العام يسعى للصفر عندما $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

وبالتالي **المتسلسلة متباعدة** $\quad \infty \quad \geq \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \quad \geq$

نتيجة : إذا سعى الحد العام لمتسلسلة لعدد ما غير الصفر تكون المتسلسلة متباعدة .

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$$

عندما

$$n \to \infty$$

الحد العام يسعى لغير نهاية و بالتالي تكون المتسلسلة متباعدة.

انظر إلى حيث تشرق الشمس... ابدأ كل يوم بحياة جديدة اصنع الأمل كن مبدعا.. اعط و انجز و ابدأ حياتك ...

انتهت المحاضرة

Good Luck

إعداد: وفاء الشيخ سالم ❀ كليمة الصالح ❀ ناريمان جلو

تنسيق: ولاء الأخضر ❀