◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السابعة

◄ عنوان المحاضرة: التقارب المنتظم لمتتالية التوابع الحقيقية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١. مبرهنات عن متتالية التوابع
٢. نتائج عن التقارب

مبرهنة : لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I \in R$ بفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع النهاية $f(x)$ على I فإذا كانت حدودها توابع محدودة على المجال I فإن تابع النهاية تابع محدود على I

الإثبات:

بفرض $\varepsilon > 0$ وبسبب التقارب المنتظم فإنه يوجد عدد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ لكل $n \geq N_0$ ، $\forall\, x \in I$ بما أن حدود المتتالية توابع محدودة على I فإنه لأجل $n \geq N_0$ يوجد عدد $K > 0$ بحيث يكون $\forall\, x \in I : |f_n(x)| < K$

لنثبت أن تابع النهاية محدود على I

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)|$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$
$$< \varepsilon + K = M$$

إذا يوجد عدد $M > 0$ بحيث يحقق $\forall\, x \in I : |f(x)| < \mathrm{M}$ وتابع النهاية $f(x)$ محدود.

ملاحظة:

١) إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على المجال I ، وتابع النهاية $f(x)$ غير مستمر على I فيكون التقارب نقطي وليس تقارباً منتظماً.

٢) إذا كان $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع محدودة وكان تابع النهاية $f(x)$ غير محدود فحتماً التقارب هو تقارب نقطي.

٣) إذا كان تابع النهاية $f(x)$ لتوابع مستمرة على I مستمراً فإنه ليس من الضروري أن تكون متقاربة بانتظام على I.

مثال: $f_n(x) = x^n$ معرف على $I =]0,1[$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \neq 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين ثم وحسب خواص اللوغاريتم : $\ln x^n < \ln \varepsilon \Rightarrow n \ln x < \ln \varepsilon$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = N(\varepsilon, x)$$

وجدنا أن N_0 تتعلق (ε, x) والتقارب هو تقارب نقطي رغم أن حدود المتتالية توابع مستمرة وتابع النهاية هو التابع الصفري تابع مستمر .

ملاحظة : إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على I

فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق

$$f(x) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$$

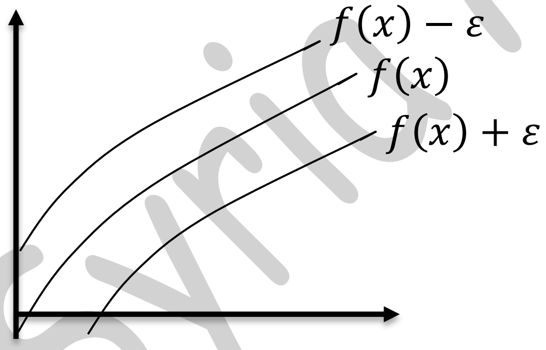
$$n \geq N_0(\varepsilon) \quad , \quad x \in I$$

في التقارب المنتظم يكون جميع منحنيات التابع $f_n(x)$

محصورة بين المنحنيين $f(x) + \varepsilon$ ، $f(x) - \varepsilon$

وفي التقارب النقطي لا تقع جميع المنحنيات لتوابع المتتالية

ضمن هذا الشريط.



مبرهنة: لتكن $f_n(x)$ متتالية توابع مستمرة على $I \subset R$ و $I = [a,b]$ بفرض أن المتتالية متقاربة بانتظام في تابع النهاية $f(x)$ على I عندئذٍ تابع النهاية $f(x)$ يكون قابل للمكاملة على $[a,b]$ ويحقق ما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

الإثبات:

حسب مبرهنة سابقة نجد أن $f(x)$ تابع النهاية مستمر على $[a,b]$ فهو قابل للمكاملة على $[a,b]$

من التقارب المنتظم نجد : $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

بفرض $\varepsilon > 0$ فإن $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ علاقة صحيحة

ومن التقارب المنتظم فإنه يوجد عدد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad ,\forall\ x \in I\ ,n \geq N_0$$

من أجل $n \geq N_0$ يكون :

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

إذاً وجدنا أن المتتالية متقاربة بانتظام ومنه:

$$lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b lim\, f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ملاحظة: إن التقارب المنتظم في نص المبرهنة السابقة هو شرط لازم وغير كافي أي ممكن أن تتحقق العلاقة لكن التقارب هو تقارب نقطي.

مثال: $I = [0,1]$ ، $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

لنوجد تابع النهاية: $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$

فالمتتالية متقاربة نقطياً وبفرض أن المتتالية متقاربة بانتظام $\varepsilon = \frac{1}{2}$ فإنه يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2}$$

لأجل $x \in [0,1]$ ، $n \geq N_0$

نفرض $n \geq N_0 \Leftarrow 1 > \frac{1}{N_0} > \frac{1}{n} > 0$

نأخذ $x = \frac{1}{n} \in I$ فإن

$$\frac{1}{2} = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{2}$$

وهذا تناقض والتقارب هو تقارب نقطي على $[0,1]$

_ هل العلاقة محققة على I ؟؟

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{ln(1+n^2x^2)}{2n}\right]_0^1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+n^2)}{2n} = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

والعلاقة محققة.

مبرهنة: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية التوابع على $[a,b]$ بفرض أنها متقاربة نقطياً على $[a,b]$من تابع النهاية $f(x)$ بفرض حدودها توابع قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ بالنسبة لـ x
كذلك والمشتقات لحدود المتتالية $f_n(x)$ هي توابع مستمرة على $I=[a,b]$ وأن $\{f_n'(x)\}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من التابع $g(x)$
عندئذٍ تابع النهاية $f(x)$ قابل للاشتقاق على المجال I ومشتقه هو $g(x)$ ويحقق ما يلي :

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$$

الإثبات: حسب مبرهنة سابقة نجد أن تابع النهاية للمتتالية $\{f_n'(x)\}$ المتقاربة بانتظام هو تابع مستمر أي $g(x)$ تابع مستمر بالتالي قابل للمكاملة على I
ليكن التابع الأصلي هو $G(x)$; $\forall\, x \in [a,b]$

$$G(x)-G(a) = [G(t)]_a^x = \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt$$

حسب مبرهنة سابقة $lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt = lim_{n\to\infty}[f_n(t)]_a^x = lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(a)]$

$$G(x)-G(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(x) - f(a)$$

$$f(x) = G(x) - G(a) + f(a)$$

فإن $$f'(x) = G'(x) = g(x)$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم * مرح غريب * ناريمان جلو