نظري

◄ دكتور المادة: حزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: الزمرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

سننهي الفصل الأول ونبدأ بمقدمة عن الفصل الثاني .. المحاضرة تتضمن :

- من الفصل الأول : تمهيدية اقليدس
- من الفصل الثاني : تعاريف ومبرهنات وأمثلة

مراجعة :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 : \exists q, r \in \mathbb{Z} \ ; \ a = qb + r$$

$$0 \leq r < |b|$$

$$gcd(a, b) = sa + tb$$

تعريف : ليكن a عدد صحيح حيث $a > 1$ نقول ان a أولي في Z اذا كانت مجموعة قواسمه $\{ \pm 1 , \pm a \}$.

تمهيدية اقليدس : لتكن p عدداًولي و $a, b \in Z$ اعداد صحيحة إذا كان p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ p إما يقسم a أو b .

الإثبات :

لنفرض أن p يقسم الجداء $a.b$ عندئذ يوجد عدد صحيح $t \in Z$ بحيث $a.b = c.p$ ولنفرض أن p لا يقسم a ولنبرهن أن p يقسم b .

توضيح : إذا أخذنا أي عدد مع عدد أولي فإن القواسم هي $(1, p)$ ولو فرضنا أنه لا يقسم عندئذ لا يبقى قواسم أخرى غير الواحد .

عندئذٍ $\gcd(a, p) = 1$ أوليان فيما بينهما

$$\exists t, S \in Z : 1 = s.a + t.p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = b.s.a + b.t.p$$

$$a.b = p.c \text{ لان} \Rightarrow b = s.p.c + t.b.p$$

$$\Rightarrow b = (s.c + t.b)p \in Z$$

هذا يبين أن p يقسم العدد b

وهو المطلوب..

انتهى الفصل الأول ..

ملاحظات : فعليا يبدأ مقرر البنى الجبرية (١) من نظرية الزمر ولكننا مطالبين بدراسة ما مر سابقا عن المجموعات و مطالبين بأسئلة نهاية الفصل ... ٢٥ علامة في الامتحان على نظرية المجموعات (الفصل الأول)

الفصل الثاني :

نظرية الزمر

مقدمة .. عد الزمرة واحدة من أهم البنى الجبرية وهي تدرس بشكل عام الخواص الجبرية للعمليات الرياضية (جمع وضرب الأعداد .. جمع وضرب المصفوفات .. جمع وضرب المتجهات ...)

تعريف الزمرة: لتكن G مجموعة غير خالية نسمي كل تطبيق من الشكل G :

ملاحظة: (* سنعبر عنها بدل من اشارة الضرب × كما يلي)

$$* : G \times G \to G$$
$$(a, b) \longmapsto a * b$$

عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي) (عملية داخلية) على المجموعة G

مثال : جمع الأعداد الصحيحة عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$ $\quad +: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

ـ البنية الجبرية هي مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي واحد على الأقل ..

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية وليكن التطبيق :

$.: G \times G \to G$ $\quad$ (.) عبارة عن إشارة ضرب

عملية ثنائية على G نقول ان الثنائية $(G, .)$ تشكل زمرة اذا حققت الشروط التالية:

١) $\quad \forall\, a, b \in G\ ;\ \ a.b \in G$

٢) العملية $(.)$ تجميعية $\forall a,b,c \in G\,;\; (a.b).c = a.(b.c)$

٣) يوجد في G عنصر بحيث $e \in G$ بحيث :

نسمي e محايد عنصر $\forall a \in G\,; a.e = e.a = a$

٤) $\forall a \in G\,; \exists\, a^{-1} \in G : a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

نسمي العنصر a^{-1} مقلوب العنصر a

أي مجموعة مزودة بقانون تشكيل داخلي (تطبيق) وتحقق الشروط الأربعة السابقة نقول عنها زمرة ..

تعريف: نقول عن الزمرة $(G,.)$ إنها تبديلية إذا حققت الشرط :

$$\forall a,b \in G\,;\;\; a.b = b.a$$

ملاحظة: ـ الزمرة التي تحتوي العملية الثنائية $(.)$ نسميها زمرة ضربية.

ـ الزمرة التي تحتوي العملية الثنائية $(+)$ نسميها زمرة جمعية.

من حيث الشكل يوجد نوعين من الزمر جمعية وضربية ولكل نوع مجموعة من الزمر نميزها وفق الجدول :

	الزمرة الجمعية $+$	الزمرة الضربية $.$
شكل العناصر	$a+b$	$a.b$
العنصر المحايد	0	$1, e$
المقلوب أو النظير	نظير a هو $-a$	مقلوب a هو a^{-1}
التشكيل	$a+(-b)$	$a.b^{-1}$
المضاعف أو القوة	مضاعف a هو : $n.a$ $n \in Z$	قوة a هي $a^n : n \in z$

ملاحظة: لتكن G زمرة و $a \in G$ و $n \in Z$

$$a^n = \begin{cases} \overbrace{a.a.a.a\ldots.a}^{n\ \text{مرة}} & n > 0 \\ e = 1 & n = 0 \\ \underbrace{a^{-1}.a^{-1}\ldots\ldots a^{-1}}_{-n\ \text{مرة}} & n < 0 \end{cases}$$

أمثلة:

_ مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالنسبة لعملية الجمع هي الأعداد $(\mathbb{Z},+)$ تشكل زمرة جمعية تبديلية والعنصر المحايد فيها الصفر.

_ $(\mathbb{Z},.)$ ليست زمرة بالنسبة لعملية ضرب الاعداد لأنها لا تحقق هذا الشرط :

$\exists\, 2 \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ لا يوجد مقلوب للعدد 2 وبذلك لا تحقق الشرط الأخير فهي ليست زمرة بالنسبة للضرب

_ لنفرض ان $\boldsymbol{M}_2(\mathrm{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} : a,b,c,d \in Z$

مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية .

ان $\boldsymbol{M}_2(\mathrm{Z})$ تشكل زمرة جمعية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، والعنصر المحايد فيها هو المصفوفة الصفرية و هي ايضاً تبديلية (جمع المصفوفات تبديلي)

ونظير العنصر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M}_2(\mathrm{Z})$ هو $-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

_ لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ تشكل زمرة ضربية بالنسبة لعملية ضرب الأعداد الحقيقية المحايد فيها هو 1

تمهيدية: لتكن $(G,.)$ زمرة عندئذ :

١) العنصر المحايد في G وحيد .
٢) مقلوب أي عنصر في G وحيد .
٣) قانون الاختصار محقق أي إذا كان $a.b = c.b \quad : \quad \forall a,b,c \in G$ فإن $a = c$
٤) $\forall a \in G \,; (a^{-1})^{-1} = a$
٥) $\forall a_1, a_2, a_3, \dots \dots . a_n \in G;$
$(a_1, a_2, a_3, \dots \dots . a_n)^{-1} = {a_n}^{-1}, {a_{n-1}}^{-1}, {a_{n-2}}^{-1} \dots \dots . {a_1}^{-1}$

الإثبات :

١) ليكن $e_1, e_2 \in G$ كل منهما عنصر محايد لنأخذ الجداء لهذين العنصريين
$$e_2 = e_2.e_1 = e_1 \Rightarrow e_1 = e_2$$

٢) ليكن $a \in G$ ولنفرض أن $b_1 , b_2 \in G$ كل منهما مقلوب للعنصر a
طالما b_1 هو المقلوب ل a فإن : $b_1.a = a.b_1 = e$

طالما b_2 هو مقلوب العنصر a فإن : $b_2.a = a.b_2 = e$

$$\Longrightarrow \quad b_1 = e.b_1 = (b_2.a)b_1 = b_2(a.b_1) = b_2.e = b_2$$

٣) لتكن $a, b, c \in G$ بحيث : $a.b = c.b$ فإن:

$$b^{-1}.(a.b) = b^{-1}.(c.b) \Longrightarrow a(b.b^{-1}) = c(b.b^{-1}) \Rightarrow \mathrm{a} = \mathrm{c}$$

٤) ليكن $a \in G$ عندئذ $a^{-1} \in G$ وان $(a^{-1})^{-1} \in G$ ويحقق:

$$\underbrace{a^{-1}}_{\text{عنصر}}.\underbrace{(a^{-1})^{-1}}_{\text{مقلوبه}} = e$$

نضرب الطرفين ب a

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

٥) يتم اثباته من خلال الاستقراء :

نثبته من أجل $n = 2$

ليكن $a, b \in G$ عندئذٍ $a.b \in G$ وإن $(a.b)^{-1} \in G$

ويحقق $(a.b).(a.b)^{-1} = e$

$$\Rightarrow \quad a(b.(a.b)^{-1}) = e$$

نضرب بـ a^{-1} من اليسار

$$b.(a.b)^{-1} = a^{-1}$$

نضرب بـ b^{-1} من اليسار

$$(a.b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

تعريف الزمرة الجزئية : لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية في G نقول ان H زمرة جزئية في G إذا كانت $(H,.)$ زمرة بالنسبة لنفس العملية المعرفة على G او بمعنى آخر إن H زمرة بحد ذاتها .

مبرهنة: لتكن (G) زمرة و H مجموعة جزئية وغير خالية في G عندئذٍ الشروط الاتية متكافئة :

١) H زمرة جزئية في G .

٢) H تحقق الشروط الاتية :

- **(a)** $\forall\, a, b \in H\, ;\, a.b \in H$
- **(b)** $\forall\, c \in H\, ;\, c^{-1} \in H$

٣) $\forall\, a,b \in H\,;\, a.b^{-1} \in H$

الاثبات :

$(1 \rightarrow 2)$لنفرض أن H زمرة جزئية عندئذ الشروط $\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}$محققة .

$(2 \rightarrow 3)$ليكن $a,b \in H$ عندئذ $b \in H$فحسب الفرض لكل عنصر في H هناك مقلوب عندئذٍ $b^{-1} \in H$اصبح لدينا وحسب الفرض $a,b^{-1} \in H$ وحسب الشرط aنجد: $a,b^{-1} \in H$.و ذلك حسب الفرض

$(3 \rightarrow 1)$لنبرهن ان H زمرة لدينا فرضاً $H \neq \emptyset$فهي تحوي عنصر على الأقل:

- ليكن $a \in H$ وحسب الفرض $e = a.a^{-1} \in H$
- ليكن $b \in H$ واصبح لدينا $e,b \in H \Leftarrow b^{-1} = e.b^{-1} \in H$
- التجميعية محققة على عناصر H
- ليكن $a,b \in H$ عندئذٍ $a,b^{-1} \in H$ فأن حسب 3) نأخذ. $a.b = a \quad (b^{-1})^{-1} \in H$
  ومنه نجد ان داخلي على H

ومنه نجد ان $(H,.)$ زمرة وبالتالي هي زمرة جزئية في G.

مثال(١) على بعض الزمر الجزئية في $\mathbb{R}$

لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وليكن $n > 0$ عدد صحيح ولنأخذ المجموعة

$$n.\mathbb{Z} = \{n.m \quad : \quad m \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$$

ان المجموعة $n\mathbb{Z}$ تشكل زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ لان:

$n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ و أن $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$لان$\{0\} \subseteq n.\mathbb{Z}$

ليكن $x,y \in n\mathbb{Z}$ ولنبرهن ان $x - y \in n\mathbb{Z}$(هنا الزمرة جمعية فتصبح طرح $x - y$ بدلاً من قوة $(x.y^{-1}$

بما ان $x,y \in n\mathbb{Z}$ فإن: $x = m_1 n,\; y = m_2 n$ حيث $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

فإن $x - y = m_1 n - m_2 n = (m_1 - m_2)n \in n.\mathbb{Z}$ ومنه فإنnZ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

ملاحظة على المثال السابق : هذا المثال ورد في اربع دورات سابقة متتالية ومن أكثر الأخطاء الشائعة كتابة $x.y$ بدل $x - y$

مثال (٢) : ليكن G زمرة تبديلية فإن المجموعة $\boldsymbol{H = \{x ; x \in G , x^2 = e\}}$ تشكل زمرة جزئية في G و أن $\boldsymbol{H \subseteq G}$

لما كان $e^2 = e \in G$ فإن $e \in H$ بحيث $\emptyset \neq H \subseteq G$

ليكن $g \in H$ عندئذ $x , y \in G \;\; ; \;\; x^2 = e \;\; , \;\; y^2 = e$

$$y = y^{-1} \;\; ; \; (y^{-1})^2 = e$$

$$(xy^{-1})^2 = x \,.\, y^{-1} \,.\, x \,.\, y^{-1} = x^2 \,.\, (y^{-1})^2 = e.e = e$$

ومنه $x.y \in H$ بالتالي فإن H زمرة جزئية في G

انتهت محاضرتنا لليوم والآن سندرج حل وظائف سابقة لم يتم إدراجها .. نعتذر عن التأخير ☹

تمهيدية:((وظيفة)) لتكن Σ اسرة من المجموعات ان العلاقة $(\sim)$ المعرفة على Σ هي علاقة تكافؤ على Σ.

البرهان :

لنعرف العلاقة

$$A \sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\, f : A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$$

- من اجل اي مجموعة $A \in \Sigma$ يوجد تطبيق مطابق : $f = I_A : A \longrightarrow A$
$$a \mapsto f(a) = a$$

وهو متباين وغامر فرضاً واستنادا لتعريف العلاقة $(\sim)$ فإن $(A \sim A)$ ومنه فإن $(\sim)$ انعكاسية .

من اجل اي مجموعة $A, B \in \Sigma$ وبحيث $A \sim B$ فإنه يوجد تطبيق $f : A \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} B$

وبما ان التطبيق f تقابل فيوجد تطبيق عكسي وليكن $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{متباين}]{\text{غامر}} A$

وهذا يعني ان $B \sim A$ وبالتالي فالعلاقة $(\sim)$ تناظرية .

- من اجل اي مجموعة $A, B, C \in \Sigma$ وبحيث $A \sim B$ و $\sim C$ فإنه يوجد تطبيق

$$f : A \xrightarrow[\text{غامر}]{\text{متباين}} B$$

$$g : B \xrightarrow[\text{غامر}]{\text{متباين}} C$$

ومنه فإن التطبيق $h = f \circ g : A \xrightarrow[\text{غامر}]{\text{متباين}} C$ وبما ان h تقابل فيؤدي الى ان $A \sim C$ وبالتالي العلاقة $(\sim)$ متعدية .

مما سبق نستنتج ان العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على Σ.

تمهيدية :(وظيفة) اثبت ان العلاقة " $\leq$ " المعرفة على أي مجموعة من القدرات هي علاقة ترتيب .

البرهان :

- لأجل أي مجموعة يوجد ما يسمى التطبيق المطابق وهو يمثل تطبيق متباين

$$I_A : A \longrightarrow A$$

ومنه العلاقة " $\leq$ " علاقة انعكاسية .

- العلاقة " $\leq$ " متعدية لان :

$$card\ A \leq card\ B \quad \Leftrightarrow \exists f : A \overset{\text{متباين}}{\leftrightarrows} B$$

$$card\ B \leq card\ D \quad \Leftrightarrow \exists g : B \overset{\text{متباين}}{\leftrightarrows} D$$

$$f : A \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} B \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} D$$

ومنه $f : A \to D$ متباين $\Leftarrow$ أن العلاقة متعدية .

لإثبات أن العلاقة " $\leq$ "تخالفيه نكتفي بنص مبرهنة **((كانتور – برنشتاين))** وبما انه يوجد تطبيق f متباين وتطبيق g متباين وحسب المبرهنة فإن $card\ A = card\ B$ وبالتالي فالعلاقة تخالفية .

وبالتالي فإن $\leq$ هي علاقة ترتيب .

انتهت المحاضرة

إعداد: رهف دادا – آية اليافي – آية بسيكي

تنسيق: ولاء الأخضر♥