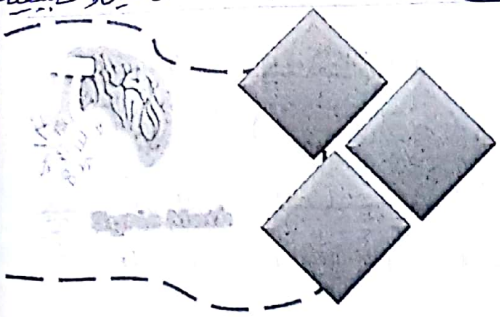

المحاضرة الثانية

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتور المادة: عضوة الجيرودي

◄ عنوان المحاضرة: تمارين + مسائل بحوث العمليات.

تمرين: هل المجموعة $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$ محدبة ولماذا؟ وذلك باستخدام الخاصة (8)، (4)

الحل:

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$\nabla^2 f=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_2x_1}\\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\forall z\neq 0:\ z^T\nabla^2 f\, z=[z_1,z_2]\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

$$=2z_1^2+2z_2^2>0$$

$\Leftarrow \nabla^2 f$ معرفة موجبة $\Leftarrow f$ محدب بالخاصة (8)

و بالخاصة (4)

المجموعة $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)\le a\}$ محدبة حيث a ثابت

إذا كان $a=1$ فإن

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f(x,y)\le 1\}$$

مجموعة محدبة

تمرين: هل التابع محدب أم مقعر ولماذا؟

$$f(x,y)=3x+7y-4$$

الحل:

$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$f(\lambda(x_1,x_2)+(1-\lambda)(y_1,y_2))$$

$$=f(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\ \lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$

$$=3(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)+7(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)-4$$

Scanned by CamScanner

$$= 3\lambda x_1 + 7\lambda x_2 + 3(1-\lambda)y_1 + 7(1-\lambda)y_2 - 4$$

" نضيف ونطرح 4λ كي نستطيع اخراج عامل مشترك "

$$= \lambda(3x_1+7x_2) + (1-\lambda)(3y_1+7y_2) - 4 + 4\lambda - 4\lambda$$

$$= \lambda(3x_1+7x_2) + (1-\lambda)(3y_1+7y_2) - 4(1-\lambda) - 4\lambda$$

$$= \lambda(3x_1+7x_2-4) + (1-\lambda)(3y_1+7y_2-4)$$

$$= \lambda f(x_1,x_2) + (1-\lambda) f(y_1,y_2)$$

ومنه f تابع محدب وعكسه بنفس الوقت (مستقيم) "صالح للاستعمال"

تمرين 13: هل التابع محدب أم مقعر ولماذا؟

$$f_3(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2} + x_1^2 + 4x_1^4 - 2x_1x_2$$

الحل:

ان التركيب الخطي لتوابع محدبة بأمثال موجبة هو تابع محدب

نفرض $g(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1^4 - 2x_1x_2$ ، $h(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2}$

$$\nabla^2 h = \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}$$

$$\forall z \neq 0 : \quad z^T \nabla^2 h\, z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= (z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2)\, e^{x_1+x_2} > 0$$

ومنه h محدب تماماً.

$$\nabla^2 g = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & (3)(16)x_2 \end{bmatrix}$$

$$\forall z \neq 0 : \quad z^T \nabla^2 g\, z = 2z_1^2 - 4z_1z_2 + (3)(16)z_2^2x_2^2$$

نضيف ونطرح $2z_2^2 - 2z_2^2$ لنشكل لدينا مربع كامل

$$= 2(z_1 - z_2)^2 + z_2^2\,(3)(16)x_2^2 - 2)$$

ليس موجب وليس سالب $\Rightarrow$ g ليس محدب وليس مقعر

Scanned by CamScanner

$f_3 = h + g$ ⟸

f_3: ليس محدب وليس مقعر — h: محدب — g: ليس محدب وليس مقعر

مثال: ليكن التابع $F(x) = e^x + 7x^2 - 3x + 4$

بين انه ليس محدب.

ملاحظة: عندما يطلب برهان علاقة كوني متأكد دائماً ستستخدم الخاصة 7 "إذا كانت C مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، $f: C \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق في C فإن:

f محدب $\iff \forall x, y \in C,\ f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x)$

الحل: $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$: $f_1(x) = e^x$

$f_2(x) = 7x^2 - 3x + 4$

$f_1(x) = e^x \Rightarrow f_1'(x) = e^x \Rightarrow f_1''(x) = e^x = \nabla^2 f_1(x)$

$\forall z \neq 0 : z^T \nabla^2 f_1(x) z = z^2 e^x > 0$ حسب خاصة (8)

$f_2(x) = 7x^2 - 3x + 4 \Rightarrow f_2''(x) = 14 = \nabla^2 f_2(x)$

$\forall z \neq 0 : z^T \nabla^2 f_2(x) z = 14 z^2 > 0$ حسب خاصة 8

التوابع F_1، F_2 محدبة حسب الخاصة (5) F تابع محدب حسب الخاصة 7:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y-x) \quad \cdots \star$$

$F(y_1, y_2) : C = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ حيث $C = \mathbb{R}^2$

نحسب $\nabla f(x) = e^x + 14x - 3$

ليكن هنا سنحول إلى (لنقول) $\nabla^T f(x) = e^x + 14x - 3$

نعوض في $\star$

$$e^y + 7y^2 - 3y + 4 \geq e^x + 7x^2 - 3x + 4 + (e^x + 14x - 3)(y - x)$$

$$\iff e^y + 7y^2 - 3y \geq e^x + 7x^2 - 3x + ye^x + 14xy - 3y - xe^x - 14x^2 + 3x$$

$$e^y + 7y^2 - ye^x - 14xy \geq -xe^x + e^x - 7x^2$$

Scanned by CamScanner

$$e^y + 7y^2 - y(14x + e^x) \geq e^x - xe^x - 7x^2$$

مسائل بحوث العمليات:

1) متحولات المسألة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تسمى متحولات القرار

2) دالة الهدف: وتكتب على الشكل $\begin{cases} \text{Max } f(x) \\ \text{Min } f(x) \end{cases}$ أو

3) شروط المسألة: هي متباينات أو معادلات تتبع دالة الهدف بمجموعة من القيود

$$g_{j_i}(x) \geq b_i \quad ; i = 1, \ldots, t$$

$$g_{j_i}(x) \leq b_j \quad ; j = t+1, \ldots, p$$

$$g_{j_k}(x) = b_k \quad ; k = p+1, \ldots, m$$

شرط عدم السلبية $x_l \geq 0 \quad : l \in L$

وتكتب المسألة بالشكل التالي:

دالة الهدف $\begin{cases} \text{Max } f(x) \\ \text{Min } f(x) \end{cases}$

شروط المسألة $\begin{cases} \text{S.t} & g_i(x) \geq b_i & i \in I \\ & g_{j_i}(x) \leq b_j & j \in J \\ & g_{j_k}(x) = b_k & k \in K \\ & x_l \geq 0 : & l \in L \end{cases}$

الترتيب المحاضرة

Scanned by CamScanner