3-10-2018

نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄المحاضرة : الثانية ◄ عنوان المحاضرة: المودولات الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـ أمثلة على المودولات

٢ـمبرهنة تخص العمليات على المودولات الجزئية

٣ـتعاريف

تذكرة: تعريف المودول: لتكن M مجموعة غير خالية ومزودة بعمليتين الداخلية $(+)$والخارجية $(.)$ومجموعة المؤثرات حلقة ما ولتكن R

$$+ : M \times M \longrightarrow M$$

$$(m_1, m_2) \longrightarrow m_1 + m_2$$

$$. : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longrightarrow r.m$$

نقول عن M أنها مودول على R إذا تحقق ما يلي:

- $(M, +)$ زمرة تبديلية الحيادي فيها 0_M
- أياً كان $m, m_1, m_2 \in M$ و $\beta, \varphi \in R$ فإن :

١) $1_R . m = m$

٢) $(\varphi + \beta).m = \varphi m + \beta m$

٣) $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi m_1 + \varphi m_2$

٤) $\varphi.(\beta m) = (\varphi\beta).m$

المودول الجزئي : ليكن لدينا $\emptyset \neq N \subseteq M$ و لتكن K حلقة عندئذ نقول عن N أنه مودول جزئي من M إذا كان مودول بحد ذاته

Syria Math Team

أو إذا تحقق:

١- $\forall x,y \in N\ ; x-y \in N$
٢- $\forall x \in N\ , a \in K\ ; a.x \in N$

مبرهنة: إذا كان M مودولا على حلقة R وكان كل من M_1, M_2 مودولا جزئيا من M فإن $M_1 \cap M_2$ مودول جزئي من M

الإثبات:

بما أن كل من M_1, M_2 مودولا جزئيا من M فإن $0_M \in M_1, M_2$ وبالتالي $0_M \in M_1 \cap M_2$

$$\Rightarrow \emptyset \neq M_1 \cap M_2$$

ومن جهة أخرى لدينا: $M_2 \subseteq M$, $M_1 \subseteq M$

$$\Rightarrow M_1 \cap M_2 \subseteq M$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq M_1 \cap M_2 \subseteq M$$

وأيضا $\forall x,y \in M_1 \cap M_2$: $x,y \in M_1$ و $x,y \in M_2$

$\Leftarrow x-y \in M_1$ لأن M_1 مودولا جزئيا من M

و $x-y \in M_2$ لأن M_2 مودولا جزئيا من M

$$\Leftarrow x-y \in M_1 \cap M_2$$

$$\forall x \in M_1 \cap M_2$$

$$x \in M_1\ , x \in M_2$$

$$\Leftarrow a.x \in M_1\ , a.x \in M_2$$

$$\Leftarrow a.x \in M_1 \cap M_2$$

$$\forall a \in R$$

مما سبق نجد أن $M_1 \cap M_2$ مودولا جزئي من M

مبرهنة : لتكن M مودول على A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من M ولنعرف :

Syria Math Team

$$\cap_{i\in I} M_i = \{ x \in M : x \in m_i \ ; \ \forall i \in I \}$$

أثبت أن $\cap_{i\in I} M_i$ هو مودول جزئي من M

الإثبات:

١- $0_M \in M_i \quad (\forall i \in I)$

وبما أن M_i مودولات جزئية في M حيث $M_i \subseteq M$

$$\Rightarrow 0_M \in \cap_{i\in I} M_i \Rightarrow \emptyset \neq \cap_{i\in I} M_i \subseteq M$$

٢- $\forall n_1, n_2 \in \cap_{i\in I} M_i \ , \ \alpha, \beta \in A$

بما أن M_i مودولات جزئية في M وذلك $\forall i \in I$ فإن :

$$n_1, n_2 \in M_i \ , \ \alpha, \beta \in A \ ; \ \forall i \in I$$

$$\alpha n_1 + \beta n_2 \in M_i \ ; \ \forall i \in I$$

ومنه فإن : $\alpha n_1 + \beta n_2 \in \cap_{i\in I} M_i$

ومنه $\cap_{i\in I} M_i$ مودول جزئي من M .

تعريف : ليكن M مودولا على حلقة R ولتكن S مجموعة جزئية من M يعرف المودول الجزئي المولد بـ S على أنه تقاطع جميع المودولات الجزئية من M التي يحوي كل منها S ونرمز له ب <S> وهو أصغر مودول جزئي من M يحوي S

تعريف : إذا كان M مودولا على R وكانت S مجموعة جزئية غير خالية من M نقول إن $x \in M$ تركيب خطي لعنصر S إذا وجد $x_1, \dots\dots, x_n \in S$ و $a_1, \dots\dots, a_n \in R$ بحيث

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i . x_i$$

ملاحظة : مجموعة جميع التراكيب الخطية لعناصر S يرمز لها ب

$$LC(S)$$

تمرين (١): إذا كانت R حلقة واحدية وليكن $n \in Z^*$ لنعرف على R^n عملية $(+)$ كما يلي :

$$(x_1, \dots . x_n) + (y_1, \dots \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Syria Math Team

ولنعرف عملية الضرب $(.)$ على النحو التالي :

$$a.(x_1, \dots .., x_n) = (ax_1, \dots \dots, ax_n)$$

$$\forall a \in R\ , \forall (x_1, \dots . x_n), (y_1, \dots .., y_n) \in R^n$$

أثبت أن R^n مودولا يساريا على R

تمرين (٢) : إذا كانت R حلقة وكان I مثالي في R فأثبت أن I مودولا على R

تمرين (٣) : إذا كان $\varphi: R \to S$ تشاكل حلقي

لنعرف $r.s = \varphi(r).s$ أثبت أن S تشاكل مودولا على R

تمرين(٤): إذا كان M مودولا على حلقة R فأثبت أن

$$(-a)x = a(-x) = -(ax)$$

$$\forall a \in R\ , \forall x \in M$$

ملاحظة: سنورد حل جميع التمارين في المحاضرة القادمة ان شاء الله

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جودة – بكر مشرف