نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثامنة ◄ عنوان المحاضرة: متتاليات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـطريقة sup في التقارب المنتظم لمتتالية التوابع.

٢ـمبرهنات (كوشي و ديني).

٣ـ خواص عن المتتاليات + مثال .

ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم لمتتالية $\{f'_n(x)\}$ هو شرط لازم وغير كافي (مبرهنة ٤)

مثال:

لتكن المتتالية $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = \frac{ln(1+n^2x^2)}{2n}$ معرفة على المجال : $[0,1]$

الحل:

نأخذ تابع النهاية : $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} \frac{ln(1+n^2x^2)}{2n} = 0$

المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة نقطياً من تابع النهاية $f(x) = 0$

مشتق حدود المتتالية $\{f_n(x)\}$ هي $\{f'_n(x)\}$.

$$f'_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

و هي توابع مستمرة على $[0,1]$ ،

بالتالي حسب المثال السابق وجدنا أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة نقطياً من تابع النهاية $g(x) = 0$

فنجد انه يتحقق : $f'(x) = g(x) = 0$

طريقة أخرى في دراسة التقارب المنتظم للمتتاليات وهي مبرهنة sup: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال $\mathbb{S}$ ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

عندئذٍ تكون القضيتين الآتيتين متكافئتين:

١) المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على $\mathbb{S}$.

٢) $lim_{n\to\infty} M_n = 0$ حيث $M_n = sup_{x\in\mathbb{S}}|f_n(x) - f(x)|$

أي أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتتالية متقاربة بانتظام هو أن تكون هذه النهاية تساوي الصفر أي أن تكون نهاية الـ sup للفرق بين $f_n(x)$ و $f(x)$ من أجل كل قيمة x من $\mathbb{S}$ تساوي الصفر.

تذكرة: الـ $supremum$ هو أصغر حد أعلى (الحد الأعلى الأصغري).

نقول عن $b \in \mathbb{R}$ أنه أعلى حد أصغري للمجموعة A إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ \forall\, x \in A \Rightarrow x \le b$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in A\, ; z > b - \varepsilon$$

مثال: لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية التوابع حيث :

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad , \qquad \mathbb{S} = [0, \infty[$$

ادرس التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x)\}$.

الحل:

نوجد تابع النهاية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$$

المتتالية متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$

إذا كان الشرط $lim_{n\to\infty} sup|f_n(x) - f(x)| = 0 \quad ; \quad x \in [0, \infty[$ محقق تكون عندها المتتالية متقاربة بانتظام حسب المبرهنة(٤) والآن لنرى إذا كان الشرط محقق أم لا.

$$\lim_{n\to\infty} sup|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} sup\left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1 \neq 0$$

وبالتالي المتتالية غير متقاربة بانتظام لأن:

$$lim_{n\to\infty}\, sup|f_n(x)-f(x)| \neq 0$$

مبرهنة 5 (دون برهان) : (اختبار كوشي):

متى تكون المتتالية متقاربة بانتظام حسب اختبار كوشي (المتتالية كوشية) ؟

تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $\mathbb{S}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على $\mathbb{S}$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث $|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$ لأجل: $\forall x \in \mathbb{S}\ ,\ \ n > m > N_0$

مثال: ادرس تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

المعرفة على : $\mathbb{S} = [0,1]$

الحل:

نأخذ تابع النهاية : $f(x) = lim_{n\to\infty}\, f_n(x) = lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$

المتتالية متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$

ليكن $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 \neq 0$ بحيث يكون :

$$|f_m(x)-f_n(x)| = \left|\frac{x^m}{m}-\frac{x^n}{n}\right| \leq \left|\frac{x^m}{m}\right| + \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

بما أن $m > n \geq N$ فإن : $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow \quad |f_m(x)-f_n(x)| < \frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \frac{2}{N_0} < \varepsilon$$

$\frac{2}{N_0} < \varepsilon$ إذاً يوجد $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ يحقق: $|f_m(x)-f_n(x)| < \varepsilon$

فحسب مبرهنة كوشي ، المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام .

توضيح : *إن $\frac{1}{m} < \frac{x^m}{m}$ و $\frac{1}{n} < \frac{x^n}{n}$ وذلك لأن أكبر قيم x هو $x = 1$ حيث أن $x \in [0,1]$

*إن: $m > n$ وهذا يعني أن : $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$

ومنه فإن : $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$

مبرهنة (بدون برهان) : (اختبار ديني):

تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[a, b]$ وبفرض أنها متقاربة نقطياً التابع $f(x)$ على $[a, b]$ وبفرض $f(x)$ تابع مستمر على $[a, b]$ و $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ اعتباراً من قيمة ما ل n عندئذ تكون المتتالية متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال $[a, b]$

مثال: $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x \quad , \quad \mathbb{S} = [0, \pi]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0$$

المتتالية متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

هو تابع مستمر على $[0, \pi]$ وتابع $f(x) = 0$ تابع مستمر على $\mathbb{S} = [0, \pi]$

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n} \geq \frac{\sin x}{n+1} = f_{n+1}$$

حسب ديني نجد أن المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$.

خواص : ليكن لينا $\{g_n(x)\}$, $\{f_n(x)\}$ متتاليتي توابع متقاربتين من تابعي النهاية $f(x)$, $g(x)$ على الترتيب على المجال $\mathbb{S}$ عندئذ :

١- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{f_n(x) + g_n(x)}\}$ متقاربة من تابع النهاية $f(x) + g(x)$ على $\mathbb{S}$

٢- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{f_n(x) . g_n(x)}\}$ متقاربة من تابع النهاية $f(x) . g(x)$ على $\mathbb{S}$

٣- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{\lambda f_n(x)}\}$ متقاربة من $\boldsymbol{\lambda} . f(x)$ على $\mathbb{S}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

كذلك تصح الخواص في حال التقارب المنتظم .

مثال :

ادرس تقارب متتالية التوابع التالية من تابع النهاية على المجال المرافق $\mathbb{S}$(تقارب منتظم أو نقطي)

1) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ حيث $x \in \mathbb{S} = [0,1]$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$$

فالمتتالية متقاربة نقطياً ، لندرس إن كان التقارب منتظم ام لا .

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ \frac{1}{2n} & : 0 < x < 1 \ \ ; x = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{1+n^2} & : x = 1 \end{cases}$$

في حالة : $0 < x = \frac{1}{n} < 1 \quad \Leftarrow \quad f_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{1+1} = \frac{1}{2n}$

$$0 \le (1-n)^2 \Rightarrow 0 \le 1 - 2n + n^2 \Rightarrow 2n \le 1 + n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n^2} \le \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية $f(x) = 0$ على $\mathbb{S}$.

2) $f_n(x) = \frac{n\,x}{1+n^2x^2}$ حيث $x \in \mathbb{S} = [0,1]$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,x}{1+n^2x^2}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}\,|f_n(x)-f(x)|$$

$$=\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}\left|\frac{n\,x}{1+n^2x^2}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

فالمتتالية متقاربة نقطياً وليس بانتظام .

3) $f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ حيث $x\in\mathbb{S}=[0,1]$

الحل :

نأخذ تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=0$$

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & : x=0\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b^{2n}}} & : \dfrac{1}{b}\\ \dfrac{1}{2} & : x=1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\begin{cases}1 & 0<x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

يعاني انقطاع عند $x=1$ فالتقارب نقطي على $\mathbb{S}$.

٤) ادرس التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n(x)\}$ حيث : $f_n(x)=sin(\frac{x}{n})$

(١) من أجل $\mathbb{S}=\mathbb{R}$.

(٢) ثم من أجل $\mathbb{S}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

(١) نأخذ تابع النهاية من اجل $\mathbb{S}=\mathbb{R}$:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} sin(\frac{x}{n})=0$$

من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $N_0>\frac{|x|}{\varepsilon_0}$ أياً كان $x\in\mathbb{R}$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|sin(\frac{x}{n})-0\right|=\left|sin(\frac{x}{n})\right|\le\frac{|x|}{n}$$

$$\Rightarrow\quad |f_n(x)-f(x)|\le\frac{|x|}{n}<\varepsilon_0$$

بالتالي يوجد : $N_0>\frac{|x|}{\varepsilon_0}$ يحقق: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

ومنه فإن التقارب نقطي لأن $N_0(x,\varepsilon_0)$ كتبت بدلالة x , ε_0

(٢) من أجل $\mathbb{S}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $N_0>\frac{|x|}{\varepsilon_0}$ أياً كان $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\pi}{2n}<\varepsilon$$

يوجد $N_0>\frac{|x|}{\varepsilon_0}$ يحقق: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

في هذه الحالة المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ لأن $N_0(\varepsilon)$ كتبت بدلالة ε فقط .

((وبهذا نكون قد أنهينا بحث متتاليات التوابع))

يمكننا تحقيق كل أحلامنا إذا كان لدينا القناعة الكاملة أننا نستطيع ذلك ((والت ديزني))

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو

تنسيق: ولاء الأخضر