المحاضرة الأولى

نظري ☑ عملي ☐

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات للبنى 2

٢٠١٨/٩/٢٥

مفردات المقرر وفصوله:

1) الموديولات المنتهية التوليد / التطبيقات الخطية / مبرهنة cayely-hamilton / تمهيديات Nakayamma

2) التوضيع: locatization

3) شروط انقطاع السلاسل

4) التحليل الابتدائي

5) تمديدات الحلقات

6) الحلقات النوثرية الناظمية / مبرهنة هلبرت للأصفار.

قبل البدء بمفردات مقرر البنى الجبرية ٤ سيتم إعطاء بعض المراجعات لبعض مفردات مقرر البنى 2

- نقول عن الحلقة التبديلية الواحدية الناظمة صحيحة (تكاملية) ونرمز لها بالرمز ID إذا كانت R لا تحوي قواسم الصفر

- لتكن R حلقة. نقول عن المجموعة $S \neq \phi$ إنها حلقة جزئية إذا تحقق ما يلي:

$\forall a,b \in S;\ a-b \in S$

$\forall a,b \in S;\ a\cdot b \in S$

ونرمز لها بالرمز $S \leq R$

وإذا كانت R تبديلية ⟸ S تبديلية

" " S تبديلية ليس بالضرورة أن تكون R تبديلية

مثال على ذلك: لتكن $R = M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$

ولتكن $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$

إن R ليست تبديلية ولكن S تبديلية

إذا كانت R واحدية ليس بالضرورة أن تكون S واحدية

مثال على ذلك: لتكن $S = 2\mathbb{Z}$ ، $R = \mathbb{Z}$

إذا كانت S واحدية ليس بالضرورة أن تكون R واحدية

مثال على ذلك: $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}$

$S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$

وأيضاً إذا وجد $1_R \in R$ و $1_S \in S$ $\overset{\text{ليس بالضرورة}}{\not\Rightarrow}$ $1_R = 1_S$

مثال على ذلك

$R = M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$, $1_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$: $1_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$1_S \neq 1_R$$

نعلم أن $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ هي حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس n

تكون $\mathbb{Z}_n$ ID $\Leftrightarrow$ $n = p$ عدد أولي

البرهان: $\Leftarrow$ لنفرض جدلاً أن n ليس أولي وبالتالي

$\exists r,s \in \mathbb{Z} : n = r.s \ ; \ 1 < r,s < n$

وبالتالي $r, s \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$

ولكن $n = r.s \equiv 0$

ولكن $\mathbb{Z}_n$ هي I.D ومنه لا تحوي قواسم الصفر أي أن n أولي.

$\Leftarrow$ لنفرض جدلاً أنه يوجد $0 \neq q, p \in \mathbb{Z}_n$ بحيث $p.q = 0 \Rightarrow n \mid p.q$

(أي أن $p.q$ يقسم n) وحسب اقليدس

إما $n \mid p \vee n \mid q$ ومنه إما

$p \equiv 0 \vee q \equiv 0$

وهذا تناقض ومنه $\mathbb{Z}_n$ I.D.

مبرهنة: أي منطقة تكاملية (صحيحة) ومنتهية هي حقل.

- لتكن R هي I.D

1) البين فيما إذا كانت R حقل:

2) إذا كانت R منتهية، اثبت أن R حقل

الحل: 1) الجواب لا.

2) الإثبات:

لتكن $R = \{a_1, \dots, a_n\}$ هي I.D ومنتهية البرهان:

ليتم المطلوب يكفي برهان أن لكل عنصر مغاير للصفر له مقلوب في R

(حسب تعريف الحقل) ليكن $a \neq 0$

لنعرف العلاقة

$\alpha : R \to R$

$\forall r \in R : \alpha(r) = a.r$

إن α تطبيق متباين

$\forall r, r_1 \in R :$

$r_1 = r \Leftarrow ar_1 = ar$

وطالما كانت R منتهية فإن α تقابل

((إذا كانت R, S منتهيات ولدينا $\alpha : R \to S$ متباين فإن α غامر أي تقابل))

وطالما كان α تقابل فإن $1 \in R :$

$\exists r \in R : \alpha(r) = 1$

$\Rightarrow ar = 1$

$\Rightarrow a^{-1} = r$

ومنه لكل عنصر مغاير للصفر مقلوب أي R حقل.

تمهيدية: لتكن R حلقة، إن R لا تحوي قواسم الصفر إذا تحقق الشرطين التاليين

1) $\forall a, b, c \in R : b.a = c.a \Rightarrow b = c$

2) $a.b = a.c \Rightarrow b = c ; a \neq 0$

البرهان: $\Leftarrow$

لنفرض أن R لا تحوي قواسم الصفر ولنثبت الشرط لدينا

$b.a = c.a \Rightarrow b.a - c.a$

$= (b - c).a = 0$

ولكن $a \neq 0$ ومنه

$b - c = 0$

$\Rightarrow b = c$

$\Leftarrow$ لنفرض الشرطين محققين

ولنثبت أن R لا تحوي قواسم للصفر

لتكن $a, b \in R : a.b = 0$

ولنفرض أن $a \neq 0$

$\Rightarrow a.b = 0 = a.0$

$\Rightarrow a.b - a.0 = 0$

$\Rightarrow a(b - 0) = 0$

$\Rightarrow b = 0$

ومنه R لا تحوي قواسم الصفر.

تمرين: لتكن R حلقة واحدية لا تحوي قواسم للصفر، وليكن $\forall a \in R : a = a^2$ أثبت أن R هي ID.

الحل: ليكن $a, b \in R$ وبالتالي حسب الفرض

نأخذ $(a+b) = (a+b)^2$

$= a^2 + a.b + b.a + b^2$

$= a + a.b + b.a + b$

$\Rightarrow a.b + b.a = 0$

$\Rightarrow a.b = -b.a$

لنثبت الآن أن $\forall a \in R : a = -a$

نأخذ

$(a+a) = (a+a)^2$

$= a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

$= a + a + a + a$

$\Rightarrow a + a = 0$

$\Rightarrow a = -a$

ومنه العلاقة محققة أي أن

$a.b = b.a$

وبالتالي R تبديلية أي أن

R هي ID.

انتهت المحاضرة

إعداد وكتابة

Ahmad Abo Altot

المحاضرة الثانية

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات للبنى 2

٢٠١٨/٩/٢٦

نظري ☑ عملي ☐

مميز الحلقة (char) لتكن R حلقة واحدية تبديلية نعرف مميز الحلقة R بأنه أصغر عدد صحيح موجب (إذا وجد) يحقق $\forall a \in R: n.a=0$

وفي حال كان غير موجود نقول اصطلاحاً ان مميز الحلقة صفر

أمثلة 1) $R=\mathbb{Z}$ فإن $char(R)=0$

2) $R=\mathbb{Z}_n$ فإن $char(R)=n$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $char=n$ عدد صحيح أكبر من الصفر إذا تحقق n أصغر عدد صحيح موجب يحقق $1_R.n=0$

البرهان: حسب التعريف

$\forall a \in R: n.a=0 ; n>0$

ولنبرهن أن $1_R \in R: 1_R.n=0$

لنفرض جدلاً أنه يوجد $0<m<n$ عدد صحيح يحقق $1.m=0$

$\forall a \in R: a=1_R.a$

$=m(1_R a)=(m.1_R).a$

$=0.a=0$

وهذا يناقض كون n أصغر عدد صحيح موجب يحقق الفرض (التعريف).

$\Leftarrow$ لنفرض أن n أصغر عدد صحيح موجب يحقق $1_R.n=0$ ولنبرهن أن $char(R)=n$ أكبر من الصفر

لدينا $\forall n \in R: a=1_R.a$

$(n.1_R).a=0.a=0$

ومنه $char(R)=n>0$

مبرهنة: لتكن R هي I.D فإن $char(R)=0$ أو $char(R)=p$ عدد أولي.

البرهان: إذا كان $char(R)=0$ تم المطلوب

أما في حالة $char(R)=n>0$ فحسب المبرهنة السابقة يوجد n أصغر عدد صحيح موجب يحقق $1_R.n=0$، لنفرض جدلاً أن n ليس عدداً أولياً

$\exists r,s \in N: 0<r,s<n$

بحيث $n = r.s$ ولكن

$0 = 1_R . n = 1_R (r.s)$

$= (1_R . r).(1_R . s)$

وبما أن R ح.ت. ID فإنه إما

$1_R r = 0$ أو $1_R s = 0$ وهذا تناقض

ومنه n عدد أولي

مبرهنة: لتكن R ح.ت. ID

1) إذا كان $char(R)=0$ فإنه يوجد حلقة جزئية في R تماثل Z

2) إذا كان $char(R)=P$ عدد أولي فإنه يوجد حلقة جزئية في R تماثل Z_p

البرهان: 1) يترك وظيفة.

2) نعرف المجموعة

$Z.1_R = \{m.1_R : m \in Z\}$

وهي حلقة جزئية في R

نعرف العلاقة

$\varphi : Z_p \longrightarrow Z.1_R$

$\forall m \in Z_p : \varphi(m) = m.1_R$

لنثبت أن φ تطبيق:

$m, m_1 \in Z_p : m = m_1$

$\Rightarrow m.1_R = m_1.1_R$

ومنه φ تطبيق وهو أيضاً تشاكل

لأن $\varphi(m+m_1) = (m+m_1)1_R$

$= m.1_R + m_1.1_R$

وأيضاً

$\varphi(m.m_1) = m.m_1.1_R$

$= (m.1_R)(m_1.1_R)$

ومنه φ تشاكل

ولنثبت أنه متباين

ليكن $m.1_R = m_1.1_R$

$\Rightarrow (m-m_1).1_R = 0$

نطبق خوارزمية القسمة على $m-m_1, P$

$\exists\, s, r \in Z :$

$m - m_1 = P.s + r \quad \forall$

$0 \le r < P$

إذا كان $r = 0$ يتم المطلوب

لنفرض جدلاً أن $r \neq 0$

ونضرب بـ 1_R

$(m_1 - m_2).1_R = P.s.1_R + r.1_R$

$0 = P.s.1_R + r.1_R$

ولكن فرضاً $char(R)=P$ ومنه

$P.1_R.s = 0$

$\Rightarrow r.1_R = 0$

وإن $r < P$ وهذا مرفوض لأن P أصغر عدد صحيح موجب يحقق $1_R P = 0$

ومنه $r = 0$ $\quad m_1 - m_2 = P.s$

$\Rightarrow m_1 = m_2 \text{ in } Z_p$

ومنه φ متباين

ولنثبت أن ce غامر

إذا أخذنا $S = \operatorname{Im} ce \subseteq Z 1_R$

ومنه $S \subseteq R$

و نجد $S \cong Z_p$

مبرهنة: ليكن R حقل مميزه p

1) إذا كان $\operatorname{char}(R) = 0$ فإنه يوجد حقل جزئي في R يماثل Q.

2) إذا كان $\operatorname{char}(R) = p$ عدد أولي فإنه يوجد حقل جزئي في R يماثل Z_p.

البرهان: 1) نعرف المجموعة

$$E = \left\{ \frac{m 1_R}{n . 1_R} ; m, n \in Z ; n \neq 0 \right\}$$

وهي حقل جزئي في R

نعرف العلاقة

$$ce : Q \longrightarrow E$$

$$\forall \frac{m}{n} \in Q ; ce\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m . 1_R}{n . 1_R}$$

ليكن $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in Q$

$$; \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m . 1_R}{n . 1_R} = \frac{m' . 1_R}{n' . 1_R}$$

ومنه ce تطبيق

وأيضاً"

$$ce\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) =$$

$$ce\left(\frac{m . n' + m' . n}{n . n'}\right) = \frac{(m . n' + m' . n) . 1_R}{n . n' . 1_R}$$

$$= \frac{(m . n' . 1_R) + (m' . n . 1_R)}{(n . 1_R) . (n' . 1_R)}$$

$$= \frac{m . 1_R}{n . 1_R} + \frac{m' . 1_R}{n' . 1_R}$$

ومن ناحية أخرى

$$ce\left(\frac{m}{n} . \frac{m'}{n'}\right) = \frac{(m . m') 1_R}{(n . n') 1_R}$$

$$= \left(\frac{m . 1_R}{n . 1_R}\right) . \left(\frac{m' . 1_R}{n' . 1_R}\right)$$

ومنه ce تشاكل ولنثبت أنه متباين: ليكن $\frac{m . 1_R}{n . 1_R} = \frac{m' . 1_R}{n' . 1_R}$

$$\Rightarrow (m . 1_R)(n' . 1_R) = (m' . 1_R)(n . 1_R)$$

$$\Rightarrow (m . n' - m' . n) . 1_R = 0$$

$$\Rightarrow m . n' - m' . n = 0$$

$$\Rightarrow m . n' = m' . n$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

ومنه ce متباين

وأن ce غامر لأن

$$\forall \frac{m . 1_R}{n . 1_R} \in E ; \exists \frac{m}{n} \in Q ; m, n \in Z$$

$$; ce\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m . 1_R}{n . 1_R}$$

ومنه $E \cong Q$

2) حسب المبرهنة السابقة

اذا كان $char(R) = p$

عندئذ توجد حلقة جزئية تماثل Z_p

وكون Z_p هو حقل فإن هذه

الحلقة الجزئية ستكون حقل

جزئي وهو يماثل Z_p .

انتهت المحاضرة

اعداد وكتابة

Ahmad Abo Altot

المحاضرة الثالثة

دكتور المادة: شوقي الراشد

عنوان المحاضرة: مراجعات للبنى 2

نظري ☑ عملي ☐

2018/10/2

حلقة الحدوديات

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و x متغيرا. ندعو المجموع المنتهي

$f(x)=a_n x^n+\dots a_1 x+a_0$

$=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; i=0,1,\dots n$

كثيرة حدود معرفة على الحلقة R

حيث $a_i \in R \; ; \; \forall n \geq i \geq 0 , \; N \ni n$

1) يسمى a_n المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x)$ يرمز له بالرمز $L(f(x))$

2) تسمى n درجة كثيرة الحدود $\deg(f)=n$

3) إذا كانت $0=a_n=\dots=a_1=a_0$ فإن $f(x)$ تسمى الحدودية الصفرية وفي هذه الحالة تكون $\deg(f)=-\infty$

4) إذا كان $L(f(x))=1$ نسمي $f(x)$ حدودية واحدية

5) إذا كانت $f(x)\in R$ تسمى حدودية ثابتة ودرجتها تساوي الصفر

6) نرمز لمجموعة كل كثيرات الحدود المعرفة على الحلقة R بالرمز

$R[x]=\{f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; \; n\in N , a_i \in R\}$

نعرف على هذه المجموعة قانوني تشكيل داخليين: ليكن $f(x),g(x)\in R[x]$

1) $f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{t}(a_k+b_k)x^k$

$; \; t=\max(n,m)$

$a_k=0 \; ; \; k>n$

$b_k=0 \; ; \; k>m$

2) $f(x).g(x)=\sum_{k=0}^{m+n} c_k . x^k$

$; \; c_k=\sum_{k=i+j} a_i . b_j$

إن الثلاثية $(R[x],+,.)$ تشكل حلقة

- إذا كانت R حلقة واحدية فإن $R[x]$ حلقة واحدية وواحدها 1

- إذا كانت R حلقة تبديلية فإن $R[x]$ حلقة تبديلية.

ملاحظات: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و ليكن $0 \neq f(x), g(x) \in R[x]$

1) $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$

أو $f(x)+g(x)=0$

مثال $f(x) = -g(x) = x^3$

$\deg(f+g) \leq \max(3,3)$

$-\infty \leq 3$

و هذا مرفوض لذلك تم تمييز الحالتين

2) $\deg(f.g) \leq \deg f + \deg(g)$

وفي حالة $L(g)$ أو $L(f)$ قابل للقلب أو R لا تحوي قواسم الصفر فإنه

$\deg(f.g) = \deg(f) + \deg(g)$

مبرهنة القسمة في حلقة الحدوديات

لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $f(x), g(x) \in R[x]$ حيث $L(g) \neq 0$ وقابل للقلب في R،

عندئذ يوجد حدوديتان وحيدتان $r(x), q(x) \in R[x]$ تحققان

$f(x) = q(x).g(x) + r(x)$

وإما $r(x)=0$ أو $\deg r(x) < \deg(g)$

الإثبات: إذا كان $\deg(f) < \deg(g)$ في هذه الحالة نختار $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$

ومنه المبرهنة صحيحة

- إذا كان $n = \deg(f) \geq \deg(g)$

في هذه الحالة يتم الإثبات بالاستقراء الرياضي القوي على درجة f، $\deg(f)=n$

لتكن $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$

وإن $\deg(g) = m$

* لأجل $n=0$ نجد

$r(x)=0$, $q(x) = f(x).g^{-1}(x)$

نعوض في العلاقة فنجد

$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ محققة

* نفرض صحة القضية لأجل أي حدودية درجتها أصغر تماماً من n

* لنبرهن صحة القضية لأجل n

لدينا $L(g) = b_m \neq 0$ ولنفرض

$h(x) = f(x) - b_m^{-1} a_n x^{n-m} g(x)$

$= (a_n x^n + \dots + a_0) - (b_m^{-1} a_n x^{n-m} b_m x^m + \dots - a_n b_m^{-1} x^{n-m} b_0)$

ومنه $a_n x^n - (b_m^{-1} x^{n-m} x^m a_n)$

$= 0$

ومنه تم تخفيض درجة h أي أن

$\deg(h(x)) < n$

وحسب الفرض الاستقرائي يوجد

$r(x), p(x) \in R[x]$

ومنه $h(x) = P(x).g(x) + r(x)$

إما $r(x) = 0$ أو $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$

نعوض عن $h(x)$ نجد

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{(P(x) + a_n b_m^{-1} . x^{n-m})}_{q(x)} . g(x) + r(x)$$

$$= q(x).g(x) + r(x)$$

حيث إما $r(x) = 0$ أو $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$

ولنثبت الوحدانية

نفرض وجود $r_1, r_2, q_1, q_2 \in R[x]$ تحققان

$f(x) = q_1(x).g(x) + r_1(x)$

حيث إما $r_1(x) = 0$ أو $\deg(r_1) < \deg(g)$

$f(x) = q_2(x).g(x) + r_2(x)$

حيث إما $r_2(x) = 0$ أو $\deg(r_2) < \deg(g)$

وبالتالي

$q_1(x).g(x) + r_1(x) = q_2(x).g(x) + r_2(x)$

$\Rightarrow (q_1 - q_2).g = r_2 - r_1$ @

لنفرض جدلاً أن $r_1 \neq r_2$

$r_2 - r_1 \neq 0$

$\Rightarrow \deg(r_2 - r_1) < \infty$

ولنأخذ درجة الطرفين @

$\deg(g) \leq \deg(q_1 - q_2) + \deg(g)$

$= \deg(r_2 - r_1) \leq \deg(r_1)$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ لأن

$\deg(r_1) < \deg(g)$

ومنه $r_1 = r_2$

وأيضاً حسب @ لأن $r_1 - r_2 = 0$

$\deg(q_1 - q_2) + \deg(g)$

$= \deg(0) = \infty$

$\Rightarrow q_1 - q_2 = 0$

$\Rightarrow q_1 = q_2$

ومنه الوحدانية صحيحة

تمرين: إذا كانت R في ID فإن $R[x]$ في ID.

ثم بين فيما إذا كانت R حقل فإن $R[x]$ حقل.

الحل: لنثبت الشق الأول من التمرين

بما أن R في ID ومنه بأن R حلقة تبديلية واحدية ومنه $R[x]$ حلقة تبديلية واحدية ويبقى إثبات الخالية من القواسم الصفرية

ليكن $f(x), g(x) \in R[x]$ وليكن $f(x) \neq 0$

وأن $f(x).g(x) = 0$

لنبرهن أن $g(x) = 0$ بأن

$\deg(f(x).g(x)) = \deg(0)$

ومن الملاحظات اذا كان R خالية من القواسم الصفرية فإن

$\deg(f)+\deg(g)=\deg(0)=\infty$

وكون $f(x)\neq 0$ فإن $\deg(f)\neq\infty$ وكذلك $g(x)\neq 0$ // $\deg(g)\neq\infty$

وهذا تناقض كون مجموع مقدارين منتهيين يساوي مقدار ∞

ومنه $f(x)=0$ أو $g(x)=0$ أي $R[X]$ خالية من القواسم الصفرية ومنه $R[X]$ ID

والآن اذا كانت R حقل لنفرض جدلاً أن $R[X]$ هو حقل ولنأخذ

$0\neq f(x)\in R[X]\setminus R$

أي أن $f(x)$ ليست ثابتة

وبما أن $R[X]$ حقل فإنه يوجد

$\exists\, g(x)\in R[X] : f(x).g(x)=1$

$\Rightarrow \deg(f(x).g(x))=\deg(1)=0$

وطالما كانت $L(g(x)), L(f(x))$ قابلان للقلب فإن

$\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))=0$

وطالما كانت f, g غير ثابتتان فإن درجتهما اكبر تماماً من الصفر تماماً وأن مجموع مقدارين موجبين تماماً صفر وهذا خلاف الفرض البديهي فإننا أي $R[X]$ ليست حقل

انتهت المحاضرة

اعداد وكتابة

Ahmad Abo Altoz

المحاضرة الرابعة

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: مراجعات بنى 2

نظري ☑

عملي ☐

مبرهنة الباقي: لتكن R حلقة تبديلية وواحدية و $a \in R$ عندئذ يوجد $P(x) \in R[x]$ تحقق:

$$f(x) = (x-a).P(x) + f(a)$$

البرهان: حسب خوارزمية القسمة

ونضع $g(x) = x - a$ ، $l(g) = 1$ قابل للقلب

$\Rightarrow \exists\, P(x), r(x) \in R[x]$

$\Rightarrow f(x) = g(x).P(x) + r(x)$

حيث إما $r(x) = 0$ أو $\deg(r) < \deg(g)$

لنثبت الآن أن $f(a) = r(a)$

في حالة $\deg(r) < \deg(g)$

نعوض عن a في

$f(a) = (a-a).P(a) + r(a)$

$f(a) = r(a)$

في حالة $r(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = (x-a).P(x)$

نعوض a فنجد

$f(a) = 0$

وهو المطلوب

نتيجة: إذا كانت R حلقة تبديلية وواحدية فإن $f(x) \in R[x]$ تقبل القسمة على $(x-r)$ إذا وفقط إذا كان $f(r) = 0$.

البرهان: لنفرض أن $(x-r) \mid f(x)$

ومنه $\exists\, q(x) \in R[x]$:

$f(x) = (x-r).q(x)$

$\Rightarrow f(r) = 0$

وذلك حسب مبرهنة الباقي

لنثبت الاتجاه المعاكس لنفرض أن $f(r)=0$ وحسب مبرهنة الباقي يمكننا أن نكتب

$\exists\, P(x) \in R[x]$:

$f(x) = (x-r)P(x) + f(r)$

ولكن $f(r) = 0$ ومنه

$(x-r) \mid f(x)$

نتيجة: إذا كانت R هي ID و $f(x) \in R[x]$ حيث $\deg(f) = n$ فإنه يوجد n صفراً لـ $f(x)$ في R على الأكثر.

يتم الإثبات على الاستقراء الرياضي على n.

نتيجة: اذا كانت R ساحة تامة ID غير منتهية
وكانت $f(x) \in R[x]$ غير ثابتة $\neq R$
تحقق $\forall r \in R: f(r)=0 \Rightarrow f(x)=0$

البرهان: لنفرض جدلاً أن $f(x) \neq 0$ لنا
حسب النتيجة السابقة يوجد $deg(f)=n$
n صفر على الأكثر لـ f في R ولكن
$a_1, \dots, a_m \in R$ أصفار f حيث $m \leq n$
وبما أن R غير منتهية فإنه يوجد
$a \notin \{a_1, \dots, a_m\}$ بحيث $f(a) \neq 0$ وهذا يناقض
الفرض كون $\forall r \in R: f(r)=0$
ومنه الفرض خاطئ ومنه $f(x)=0$

نتيجة: لتكن R ساحة ID غير منتهية
وكانت $f(x), g(x) \in R[x]$ إذا كان
$\forall r \in R: f(r)=g(r) \Rightarrow f(x)=g(x)$

الإثبات: لنعرف $\forall r \in R$
$h(x) = f(x) - g(x) = 0$
وحسب النتيجة السابقة
$\Rightarrow h(x) = 0$
$\Rightarrow f(x) = g(x)$

مثال: لتكن R حلقة منتهية ولكن
$f(x)=x^3,\ g(x)=x \in \mathbb{Z}_3$
$f(0)=g(0)=0 \dots$
ولكن $f(x) \neq g(x)$ وذلك لأن R منتهية

نتيجة: إذا كان $z \in \mathbb{C}$ صفراً
للحدودية $f(x)$ فإن $\bar{z}$ مرافق z صفراً لـ $f(x)$

البرهان: z صفر لـ f أي
$$0 = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$
ولنأخذ مرافق الطرفين
$$\bar{0} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i = 0$$
ومنه $\bar{z}$ صفر لـ f

نتيجة: لتكن $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ معرفة على $\mathbb{R}$
$deg(f)=n$ إذا كان n عدداً فردياً
فإنه يوجد على الأقل صفر واحد لـ
f في $\mathbb{R}$

البرهان: لتكن $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$
وبما أن درجتها n فإنه يوجد n صفر لـ f في $\mathbb{C}$
حسب النتيجة السابقة $z \in \mathbb{C}$ صفر لـ f
فإن $\bar{z}$ صفر لـ f إذا فرضنا جدلاً
بأنه لا يوجد صفر حقيقي للحدودية f فإنه
سيكون عدد الأصفار زوجي لأن كل عنصر له
مرافق وكلاهما صفر لـ f وبالتالي هذا يناقض
كون الدرجة فردية ومنه الفرض الجدلي خاطئ.

انتهت المحاضرة

إعداد وكتابة

Ahmad Abo Altot