الثلاثاء
25/9/2018

الرابعة

◄ دكتور المادة: محمد منان أحمد

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التكاملية الخطية ..

نظري ☑
عملي ☐

"حل تمرين الوظيفة من المحاضرة السابقة"

أعد السؤال السابق من أجل المعادلة التكاملية التالية:

$$\psi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\, \psi(t)\, dt$$

الحل ◄

$$\psi_0(x) = h(x) = 1$$

$$\psi_1(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\, dt = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\psi_2(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\cdot\left[1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right)\right] dt$$

$$= 1 + \lambda \int_0^1 \left[1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - 3xt - 3\lambda xt\left(1 - \frac{3}{2}t\right)\right] dt$$

$$= 1 + \lambda\left[t + \lambda t - \frac{3}{4}\lambda t^2 - \frac{3}{2}xt^2 - \frac{3}{2}\lambda x t^2 + \frac{3}{2}xt^3\lambda\right]_0^1$$

$$= 1 + \lambda\left[1 + \lambda - \frac{3}{4}\lambda - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x\lambda + \frac{3}{2}x\lambda\right]$$

$$= 1 + \lambda + \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda x$$

$$\psi_2(x) = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4}$$

$$\psi_3(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right)\right) dt$$

$$= 1 + \lambda \int_0^1 1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - 3xt - 3xt\frac{\lambda^2}{4} - 3xt\lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right) dt$$

$$= 1 + \lambda \int_0^1 1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}t\right) - 3xt - 3xt\frac{\lambda^2}{4} - 3xt\lambda + \frac{9}{2}xt^2\lambda\, dt$$

$$= 1 + \lambda\left[t + \frac{\lambda^2}{4}t + \lambda t - \frac{3}{4}\lambda t^2 - \frac{3}{2}xt^2 - \frac{3}{8}xt^2\lambda^2 - \frac{3}{2}xt^2\lambda + \frac{3}{2}xt^3\cdot\lambda\right]_0^1$$

$$= 1 + \lambda\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda - \frac{3}{4}\lambda - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x\lambda^2 - \frac{3}{2}x\lambda + \frac{3}{2}x\lambda\right]$$

$$= 1 + \lambda\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x\lambda^2\right]$$

$$= 1 + \lambda\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x\lambda^2\right]$$

Scanned by CamScanner

$$= 1 + \lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{2}x\lambda - \frac{3}{8}\lambda^3 x$$

$$\Rightarrow \psi_3(x) = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow \psi_4(x) = 1 + \left(1 - \frac{3}{2}x\right)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \psi_5(x) = 1 + \left(1 - \frac{3}{2}x\right)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{16}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \psi_6(x) = 1 + \left(1 - \frac{3}{2}x\right)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{16}\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16}\right)$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x) = 1 + \left(1 - \frac{3}{2}x\right)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{16} + \frac{\lambda^7}{64} + \cdots\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16} + \frac{\lambda^6}{64} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right)\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16} + \frac{\lambda^6}{64} + \cdots\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16} + \frac{\lambda^6}{64} + \cdots\right)$$

نخرج λ عامل مشترك

$$\Leftarrow 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right)\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^m + \frac{\lambda^2}{4}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^m$$

$$\psi_n(x) = 1 + \left(\lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4}\right)\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^m$$

وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = 1 + \left(\lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4}\right)\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^m}$$

هذه متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{\lambda^2}{4}$ مجموعها $S = \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{4}}$

$$\psi(x) = 1 + \left(\lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{4}}\right) \quad ; \lambda^2 < 4 \Rightarrow |\lambda| < 2 \text{ عندما}$$

$$= 1 + \left(\lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\lambda^2}{4}\right)\left(\frac{4}{4 - \lambda^2}\right) = 1 + \left(\frac{2\lambda(3 - 3x) + \lambda^2}{4}\right)\frac{4}{4 - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = 1 + \left(\frac{2\lambda(2 - 3x) + \lambda^2}{4 - \lambda}\right)}$$

ولله الطلب..

Scanned by CamScanner

نفس السؤال السابق ولكن بطريقة أسهل بكثرة الـ m :

السؤال

$$k_1(x,t) = k(x,t) = 1 - 3xt$$

$$k_2(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z).k_1(z,t).dz = \int_0^1 (1-3xz)(1-3zt).dz$$

$$= 1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}x + 3xt$$

$$k_3(x,t) = \int_0^1 (1-3xz)\left(1 - \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}z + 3zt\right).dz$$

$$k_3(x,t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z + tx - \frac{1}{4}(1-3xt) = \frac{1}{4}k_1(x,t)$$

$$k_4(x,t) = \int_0^1 (1-3zx)\left(\frac{1}{4} - 3zt\right).dz = \frac{1}{4}k_2(x,t)$$

$$k_5(x,t) = \frac{1}{4}k_3(x,t)$$

$$\vdots$$

$$k_m(x,t) = \frac{1}{4}k_{m-2}(x,t)$$

نعوض في متسلسلة نيومن :

$$\psi(x) = 1 + \lambda\int_0^1 (1-3xt).dt + \lambda^2\int_0^1 (1+3xt - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}t)\,dt$$

$$+\lambda^3\int_0^1 \frac{1}{4}(1-3xt)\,dt + \dots$$

$$= 1 + \int_0^1 (1-3xt)\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{4^2} + \dots\right).dt$$

$$+\int_0^1 \left(1-3xt - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}t\right).dt\left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{4} + \dots\right)$$

اخرجنا التكامل عامل مشترك

نلاحظ أن

$$\left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^5}{4^2} + \dots\right) = \lambda\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{4^2} + \dots\right)$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{4} + \frac{\lambda^6}{4^2} + \dots\right) = \lambda^2\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{4^2} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 1 + \left(1 - \frac{3x}{2}\right)\left(\frac{4\lambda}{4-\lambda^2}\right) + \frac{4\lambda^2}{4-\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \frac{4 + 2\lambda(2-3x)}{4-\lambda^2}$$

مرصن لتقارب $D\left(0, \frac{1}{B}\right)$ لنسب الآن B

Scanned by CamScanner

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2 . dx.dt = \iint_{0\,0}^{1\,1} (1-3xt)^2 . dx\,dt = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow |A| < \frac{1}{B}$$

$$\rightarrow |A| < 2$$

$D(0, \sqrt{2})$ وبالتالي قرص التقارب

مثال أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\psi(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \; \psi(t).dt$$

$$K_1(x,t) = K(x,t) = \sin x \cos t$$

$$K_2(x,t) = \int_0^{2\pi} K_1(x,z)\, K_1(z,t).dz = \int_0^{2\pi} \sin x \cos z . \sin z . \cos t \, .dz$$

$$= \sin x \cos t \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2z \, .dz$$

تذكر: $\sin 2z = 2 \sin z . \cos z$

$$= \frac{1}{2} \sin x \cos t \left[-\frac{1}{2} \cos 2z\right]_0^{2\pi} = 0$$

$\cos 2z$: 0

$$\Rightarrow K_n(x,t) = 0$$

ومنه: وذلك أياً كانت $n \geq 2$

ملاحظة إن حل معادلة فريدهولم التكاملية إن وجد فهو وحيد:

البرهان لنفرض أن ψ_1 و ψ_2 حلان للمعادلة (1)

$$\psi_0(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$$

$$\psi_1(x) = h(x) + A\int_a^b K(x,t).\psi_1(t).dt$$

Scanned by CamScanner

$$\psi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi_2(t).dt$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,\psi_0(t).dt$$

نطبق متراجحة شفارتز على طرفي هذه المعادلة:

$$|\psi_0(x)|^2 \le |\lambda|^2 \int_a^b |K(x,t)|^2.dt \cdot \int_a^b |\psi_0(t)|^2.dt$$

نأخذ التكامل بالنسبة لـ x:

$$\int_a^b |\psi_0(x)|^2.dx \le |\lambda|^2 \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2.dt.dx \int_a^b |\psi_0(t)|^2.dt$$

$$\int_a^b |\psi_0(x)|^2.dx \le |\lambda|^2.B^2.\int_a^b |\psi_0(t)|^2.dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b |\psi_0(x)|^2.dx - |\lambda|^2.B^2 \int_a^b |\psi_0(x)|^2.dx \le 0$$

نخرج التكامل عامل مشترك:

$$(1 - |\lambda|^2.B^2)\int_a^b |\psi_0(x)|^2.dx \le 0$$

ولكن حسب الدراسة النظرية:

$$|\lambda|.B < 1$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) = \psi_1 - \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2 \quad \forall x \in [a,b]$$

انتهت المحاضرة ... ♡

إعداد: إيناس دليل

النجاح الذي أنت به اليوم، حصادتك الأيام بيقظتها لن تمضي اجتهد الآن لتقصد في الغد..

Scanned by CamScanner