◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السادسة

◄ عنوان المحاضرة: التقارب المنتظم لمتتالية التوابع الحقيقية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١) تعريف التقارب المنتظم لمتتالية التوابع.
٢) أمثلة عن دراسة التقارب.
٣) خواص التوابع المتقاربة بانتظام (مبرهنة).

التقارب المنتظم لمتتالية التوابع الحقيقية

تعريف : نقول عن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $I \in R$ أنها متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق ما يلي لأجل $n \geq N_0$ ولكل $x \in I$ فإن :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

نتيجة : كل متتالية توابع حقيقية معرفة على $I \subseteq R$ فإن $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام هي متتالية متقاربة نقطياً على I **ولكن** العكس غير محقق بالضرورة.

ونجد في حال تقاربت المتتالية وكانت $N_0(\varepsilon, x)$ أي أن N_0 تابعة لـ ε, x عندها تكون المتتالية متقاربة نقطياً ، أما إذا كانت $N_0(\varepsilon)$ أي N_0 بدلالة ε فقط أي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ تكون عندها المتتالية متقاربة بانتظام

مثال : ادرس تقارب متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ المعرفة على $I = [1, +\infty[$.

نوجد تابع النهاية ⇐ $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$

ومنه فإن متتالية التوابع متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$.

هل المتتالية متقاربة بانتظام للتابع الصفري $f(x) = 0$ ؟؟

نفرض $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يتحقق لأجل كل $x \in I$ ، $n \geq N_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{nx} - 0\right| = \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \ \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < N_0(\varepsilon) \leq n$$

وجدنا لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ بحيث يتحقق :

$$\left|\frac{1}{nx} - 0\right| < \varepsilon$$

ولأجل $n \geq N_0$ ولأجل كل $x \in [1, +\infty[$

فالتقارب هو تقارب منتظم على I

مثال : ادرس تقارب متتالية التوابع $f_n(x) = x^n$ المعرفة على المجال $I = [p, q]$ حيث $0 < p < q < 1$.

نأخذ تابع النهاية $f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} x^n = 0$

إذاً فمتتالية التوابع متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$

نفرض أن $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 > max(1, \frac{ln\,\varepsilon}{ln\,q})$

بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$|x^n - 0| < \varepsilon \ \Rightarrow |x^n| < \varepsilon \ \Rightarrow x^n < \varepsilon$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين $ln\,x^n < ln\,\varepsilon$

وحسب خواص اللوغاريتم فإن $n\,ln\,x < ln\,\varepsilon$

نقسم على $ln\,x$ وبما أن $0 < x < 1$ فإن اللوغاريتم سالب لهذا نقلب إشارة المتراجحة ونأخذ أكبر قيمة لـ x تحقق المتراجحة ونعوضها لتصغير البسط فقط.

$$n > \frac{ln\,\varepsilon}{ln\,x} > \frac{ln\,\varepsilon}{ln\,q} \qquad , 0 < x < 1$$

وجدنا N_0 تتعلق بـ ε فقط $N_0 > \frac{ln\,\varepsilon}{ln\,q}$

نفرض أن $n > 1$ ومنه فإن $N_0 = max(1 , \frac{ln\, \varepsilon}{ln\, q})$

حيث $n \geq N(\varepsilon)$ وبالتالي التقارب هو تقارب منتظم على المجال $I = [p,q]$ ولكل $x \in I$.

خواص التوابع المتقاربة

مبرهنة: لتكن $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ متتالية التوابع معرفة على $I \in R$ ومتقاربة بانتظام ومتقاربة من تابع النهاية $f(x)$ على المجال I ، فإذا كانت حدود هذه المتتالية مستمرة على المجال على المجال I فإن تابع النهاية $f(x)$ تابع مستمر على I .

الإثبات:

لتكن $x \in I$ بما أن المتتالية المتقاربة بانتظام على I فإنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

لكل $n \geq N_0(\varepsilon)$ ولأجل كل $x \in I$

وبما أن حدود المتتالية توابع مستمرة I من أجل كل $x_0 \in I$ و $n \geq N_0(\varepsilon)$

يوجد لكل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ عدد $\delta \neq 0$ بحيث إذا تحقق $|x - x_0| < \delta$ فإن $|f_n(x) - f(x_0)| < \delta$

لنبرهن أن $f(x)$ تابع مستمر على I

أي لنتثبت أن $\forall\, \varepsilon > 0\, ;\, \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\text{تقارب منتظم}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\text{استمرار}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\text{تقارب منتظم}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

إذا تحقق شرط الاستمرار ... فإن التابع $f(x)$ مستمرا على I .

إعداد: وفاء شيخ سالم * مرح غريب * ناريمان جلو